

Teoría – Tema 5

Integrales con fracciones de polinomios

Índice de contenido

Grado del numerador $P(x)$ menor que Grado del denominador $Q(x)$	2
Raíces reales simples en el denominador $Q(x)$	2
Raíces reales múltiples en el denominador $Q(x)$	3
Raíces reales simples y múltiples en el denominador $Q(x)$	5
Ecuación cuadrática con solución real o compleja en el denominador $Q(x)$	5
Denominador $Q(x)$ como producto de raíces reales y de ecuación cuadrática con solución real o compleja.....	6
Grado del numerador $P(x)$ mayor o igual que Grado del denominador $Q(x)$	8

Grado del numerador $P(x)$ menor que Grado del denominador $Q(x)$

Consideremos la integral de un cociente de polinomios.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Donde el grado del numerado $P(x) <$ grado del denominador $Q(x)$.

Al afrontar estas integrales vamos a **obtener tanto las raíces del numerador como del denominador**, por si fuese posible simplificar algún factor común.

Si no podemos simplificar, o tras hacerlo seguimos teniendo un cociente de polinomios de integral no inmediata, **expresaremos el denominador factorizado en sus raíces** (que pueden ser reales y/o complejas).

Raíces reales simples en el denominador $Q(x)$

En este primer caso el polinomio del denominador podemos factorizarlo en raíces reales simples:

$$Q(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

Y el cociente de polinomios podemos expresarlo como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \dots + \frac{N}{x - x_n}$$

$$\frac{P(x)}{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)} = \frac{A \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) + B \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) + \dots + N \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})}{x - x_1}$$

Iguamos los denominadores:

$$P(x) = A \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) + B \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) + \dots + N \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})$$

De tal forma que los factores indeterminados A, B, \dots, N podemos conocerlos **dando valores a la variable x** .

Si $x = x_1 \rightarrow$ obtenemos A

Si $x = x_2 \rightarrow$ obtenemos B

...

...

Si $x = x_n \rightarrow$ obtenemos N

Ejemplo

$$\int \frac{4x^2 + 8x + 6}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx = \int \frac{4x^2 + 8x + 6}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx$$

$$\frac{4x^2 + 8x + 6}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

$$4x^2 + 8x + 6 = A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1)$$

$$\text{Si } x=1 \rightarrow 18=6A \rightarrow A=3$$

$$\text{Si } x=-1 \rightarrow 2=-2B \rightarrow B=-1$$

$$\text{Si } x=-2 \rightarrow 6=3C \rightarrow C=2$$

Sustituyendo estos coeficientes en la integral:

$$\int \frac{4x^2 + 8x + 6}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx = \int \left[\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} \right] dx = \int \left[\frac{3}{x-1} + \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2} \right] dx$$

$$\int \left[\frac{3}{x-1} + \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2} \right] dx = 3 \ln|x-1| - \ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + C$$

Raíces reales múltiples en el denominador $Q(x)$

En este segundo caso el polinomio del denominador podemos factorizarlo en raíces reales múltiples:

$$Q(x) = (x - x_1)^n$$

Y el cociente de polinomios podemos expresarlo como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)^n} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{N}{(x-x_n)^n}$$

Igualamos los denominadores:

$$P(x) = A \cdot (x-x_1)^{n-1} + B \cdot (x-x_1)^{n-2} + \dots + N$$

Los factores indeterminados A, B, \dots, N podemos conocerlos **dando valores a la variable x** .

Si $x=x_1 \rightarrow$ obtenemos N

Damos valores arbitrarios a $x \neq x_1$ para obtener el resto de factores A, B, \dots a través de un sistema de ecuaciones.

Ejemplo

$$\int \frac{2x-1}{x^3-3x^2+3x-1} dx = \int \frac{(2x-1)}{(x-1)^3} dx$$

$$\frac{2x-1}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

$$2x-1 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C$$

Si $x=1 \rightarrow 1=C \rightarrow C=1$

Si $x=0 \rightarrow -1=A-B+1$

Si $x=2 \rightarrow 3=A+B+1$

Con las últimas dos ecuaciones formamos un sistema:

$$\begin{cases} -2=A-B \\ 2=A+B \end{cases} \rightarrow A=0, B=2$$

Sustituyendo estos coeficientes en la integral:

$$\int \frac{(2x-1)}{(x-1)^3} dx = \int \left[\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} \right] dx = \int \left[\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} \right] dx$$

$$\int \left[\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} \right] dx = \frac{-2}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C$$

Raíces reales simples y múltiples en el denominador Q(x)

Este tercer caso es **composición de los dos anteriores**. El polinomio del denominador Q(x) lo factorizamos en sus distintas raíces reales simples como en sus raíces múltiples.

Ejemplo

$$\int \frac{3x+7}{x^3-x^2-x+1} dx = \int \frac{(3x+7)}{(x+1)(x-1)^2} dx$$

$$\frac{(3x+7)}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$3x+7 = A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)$$

Si $x=1 \rightarrow 10=2C \rightarrow C=5$

Si $x=-1 \rightarrow 4=4A \rightarrow A=1$

Si $x=0 \rightarrow 7=1-B+5 \rightarrow B=-1$

Sustituyendo estos coeficientes en la integral:

$$\int \frac{3x+7}{x^3-x^2-x+1} dx = \int \left[\frac{1}{x+1} + \frac{-1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2} \right] dx = \ln|x+1| - \ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + C$$

Ecuación cuadrática con solución real o compleja en el denominador Q(x)

En este cuarto supuesto el denominador queda expresado como una ecuación de segundo grado, con solución real o compleja.

Vamos a considerar dos tipos de integrales que cumplen estos requisitos: integrales con numerador P(x) igual a una constante y Q(x) un polinomio de grado dos, e integrales con numerador P(x) igual a un polinomio de grado uno y Q(x) de grado dos.

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx \rightarrow \text{Buscaremos arcotangente} \rightarrow \frac{d[\text{arctg}(f(x))]}{dx} = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx \rightarrow \text{Buscamos logaritmo} \rightarrow \frac{d[\ln(f(x))]}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

La idea de **buscar la forma de la derivada de la arcotangente o del logaritmo dentro de la integral puede aplicarse tanto si el polinomio del denominador admite soluciones complejas como reales**. Lógicamente, si la ecuación de segundo grado admite soluciones reales y somos capaces de obtenerlas, la integral quedaría reducida a alguno de los casos anteriormente descritos para raíces reales simples o múltiples.

Estos métodos son herramientas útiles, sabiendo que en algunas integrales se pueden acortar los pasos de solución sumando, restando, multiplicando y/o dividiendo factores... y esto solo se aprende con la práctica. Recordando que **integrar tiene un poco de arte...** y el arte tiene mucho de esfuerzo y trabajo, y una **pizca de inspiración**.

Ejemplo

$$\int \frac{1}{2x^2+x+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+\frac{x}{2}+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}+\frac{15}{16}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}} dx$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{\frac{15}{16}+\left(\frac{4x+1}{4}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\frac{15}{16}\cdot\left[1+\frac{16}{15}\cdot\left(\frac{4x+1}{4}\right)^2\right]} dx = \frac{16}{2\cdot 15} \int \frac{1}{1+\left(\frac{4x+1}{\sqrt{15}}\right)^2} dx$$

$$\frac{8}{15} \int \frac{1}{1+\left(\frac{4x+1}{\sqrt{15}}\right)^2} dx = \frac{8}{15} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \int \frac{\frac{4}{\sqrt{15}}}{1+\left(\frac{4x+1}{\sqrt{15}}\right)^2} dx = \frac{2}{\sqrt{15}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{4x+1}{\sqrt{15}}\right) + C$$

Ejemplo

$$\int \frac{x+5}{2x^2+x+2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x+20}{2x^2+x+2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x+1+19}{2x^2+x+2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x+1}{2x^2+x+2} dx + \frac{1}{4} \int \frac{19}{2x^2+x+2} dx$$

$$\frac{1}{4} \int \frac{4x+1}{2x^2+x+2} dx + \frac{1}{4} \int \frac{19}{2x^2+x+2} dx = \frac{1}{4} \ln|2x^2+x+2| + \frac{19}{4} \int \frac{1}{2x^2+x+2} dx + C$$

La integral que aparece en el segundo sumando es idéntica a la resuelta en el ejemplo anterior, por lo que escribimos directamente su solución final.

$$\frac{19}{4} \ln|2x^2+x+2| + \frac{19}{2\cdot\sqrt{15}} \operatorname{arctg}\left(\frac{4x+1}{\sqrt{15}}\right) + C$$

Denominador $Q(x)$ como producto de raíces reales y de ecuación cuadrática con solución real o compleja

Ahora el denominador queda expresado de la siguiente forma:

$$Q(x) = (x-x_1)(x-x_2)^n(ax^2+bx+c)$$

Es decir, estamos ante una integral que une todos los casos anteriores: el denominador se puede expresar como producto de raíces reales simples, por raíces reales múltiples y

por ecuación cuadrática que admita solución real o compleja.

El cociente de polinomios de quedaría:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)^n(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \dots + \frac{L}{(x-x_2)^n} + \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$$

Donde los distintos coeficientes A, B, \dots, L, M, N se obtienen dando valores a la variable x .

Ejemplo

$$\int \frac{x+3}{x^3+x} dx = \int \frac{x+3}{x(x^2+1)} dx$$

$$\frac{x+3}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$x+3 = A(1+x^2) + (Bx+C)x$$

Si $x=0 \rightarrow 3=A$

Si $x=1 \rightarrow 4=6+B+C$

Si $x=2 \rightarrow 5=15+4B+2C$

Con las dos últimas ecuaciones planteamos un sistema 2x2 de soluciones:

$$B=-3, C=1$$

Y la integral queda expresada como:

$$\int \frac{x+3}{x(x^2+1)} dx = \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{-3x+1}{1+x^2} dx = 3 \cdot \ln|x| - 3 \int \frac{x}{1+x^2} dx + 1 \int \frac{x}{1+x^2} dx + C$$

$$3 \cdot \ln|x| - \frac{3}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx + \operatorname{arctg} x + C = 3 \cdot \ln|x| - \frac{3}{2} \ln|1+x^2| + \operatorname{arctg} x + C$$

Grado del numerador $P(x)$ mayor o igual que Grado del denominador $Q(x)$

Si dividimos el polinomio $P(x)$ entre $Q(x)$, obtenemos un cociente $C(x)$ y un resto $R(x)$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Si la división es exacta, el resto es cero $\rightarrow R(x)=0 \rightarrow$ La integral de la división de polinomios queda reducida a la integral de un polinomio $C(x)$, que es inmediata.

Si la división no es exacta $\rightarrow R(x) \neq 0 \rightarrow$ La integral de la división de polinomios queda reducida a la integral de un polinomio $C(x)$ más la integral del cociente $\frac{R(x)}{Q(x)}$. Y el grado del resto $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$, por lo que estaremos ante uno de los casos desarrollados en el apartado anterior: división de polinomios con grado en el numerador menor que el grado en el denominador. Veamos un ejemplo.

$$\int \frac{x^3+3}{x^2-1} dx \rightarrow \text{Hacemos la división de polinomios}$$

Dividendo (numerador) $\rightarrow x^3+3$

Divisor (denominador) $\rightarrow x^2-1$

$$\begin{array}{r} x^3+3 \\ -x^3+x \\ \hline x+3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \overline{) x^2-1} \\ x \end{array}$$

Cociente $\rightarrow x$

Resto $\rightarrow x+3$

$$\frac{x^3+3}{x^2-1} = x + \frac{x+3}{x^2-1} \rightarrow \int \frac{x^3+3}{x^2-1} dx = \int \left(x + \frac{x+3}{x^2-1} \right) dx = \int x dx + \int \frac{x+3}{x^2-1} dx$$

Es decir, hemos convertido la integral de partida en la suma de dos integrales (una polinómica y otra un cociente de polinomios, con el grado del numerador menor que el grado del denominador).

$$\int x \, dx + \int \frac{x+3}{x^2-1} \, dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x+3}{(x+1)(x-1)} \, dx$$

Aplicamos el método de los coeficientes indeterminados.

$$\frac{x+3}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \quad \rightarrow \quad x+3 = A(x-1) + B(x+1)$$

$$\text{si } x=1 \quad \rightarrow \quad 4=2B \quad \rightarrow \quad B=2$$

$$\text{si } x=-1 \quad \rightarrow \quad 2=-2A \quad \rightarrow \quad A=-1$$

$$\frac{x^2}{2} + \int \frac{x+3}{(x+1)(x-1)} \, dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{-1}{x+1} \, dx + \int \frac{2}{x-1} \, dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x+1| + 2\ln|x-1| + C$$