Teoría – Tema 5

Integrales con fracciones de polinomios

Índice de contenido

Grado del numerador P(x) menor que Grado del denominador Q(x)

Consideremos la integral de un cociente de polinomios.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

Donde el grado del numerado $P(x)$ < grado del denominador $Q(x)$.

Al afrontar estas integrales vamos a **obtener tanto las raíces del numerador como del denominador**, por si fuese posible simplificar algún factor común.

Si no podemos simplificar, o tras hacerlo seguimos teniendo un cociente de polinomios de integral no inmediata, **expresaremos el denominador factorizado en sus raíces** (que pueden ser reales y/o complejas).

Raíces reales simples en el denominador Q(x)

En este primer caso el polinomio del denominador podemos factorizarlo en raíces reales simples:

$$Q(x)=(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$$

Y el cociente de polinomios podemos expresarlo como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\ldots+\frac{N}{x-x_n}$$

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}=\frac{A\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)+B\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)+\ldots+N\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}$$

Igualamos los denominadores:

$$P(x)=A\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)+B\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)+\ldots+N\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})$$

De tal forma que los factores indeterminados $A, B, \ldots, N$ podemos conocerlos **dando valores a la variable** x .

Si $x=x_1$ → obtenemos A

Si $x=x_2$ → obtenemos B

…

…

Si $x=x_n$ → obtenemos N

Ejemplo

$$\int \frac{4x^2+8x+6}{x^3+2x^2-x-2}dx=\int \frac{4x^2+8x+6}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx$$

$$\frac{4x^2+8x+6}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}$$

$$4x^2+8x+6=A(x+1)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x+1)$$

Si $x=1 \rightarrow 18=6A \rightarrow A=3$

Si $x=-1 \rightarrow 2=-2B \rightarrow B=-1$

Si $x=-2 \rightarrow 6=3C \rightarrow C=2$

Sustituyendo estos coeficientes en la integral:

$$\int \frac{4x^2+8x+6}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx=\int\left[\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}\right]dx=\int\left[\frac{3}{x-1}+\frac{-1}{x+1}+\frac{2}{x+2}\right]dx$$

$$\int\left[\frac{3}{x-1}+\frac{-1}{x+1}+\frac{2}{x+2}\right]dx=3\ln|x-1|-\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C$$

Raíces reales múltiples en el denominador Q(x)

En este segundo caso el polinomio del denominador podemos factorizarlo en raíces reales múltiples:

$$Q(x)=(x-x_1)^n$$

Y el cociente de polinomios podemos expresarlo como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-x_1)^n}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{(x-x_1)^2}+...+\frac{N}{(x-x_n)^n}$$

Igualamos los denominadores:

$$P(x)=A\cdot(x-x_1)^{n-1}+B\cdot(x-x_1)^{n-2}+...+N$$

Los factores indeterminados $A,B,...,N$ podemos conocerlos **dando valores a la variable** x .

Si $x=x_1$ → obtenemos N

Damos valores arbitrarios a $x\neq x_1$ para obtener el resto de factores A, B,... a través de un sistema de ecuaciones.

Ejemplo

$$\int\frac{2x-1}{x^3-3x^2+3x-1}dx=\int\frac{(2x-1)}{(x-1)^3}dx$$

$$\frac{2x-1}{(x-1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}$$

$$2x-1=A(x-1)^2+B(x-1)+C$$

Si $x=1 \rightarrow 1=C \rightarrow C=1$

Si $x=0 \rightarrow -1=A-B+1$

Si $x=2 \rightarrow 3=A+B+1$

Con las últimas dos ecuaciones formamos un sistema:

$$\begin{Bmatrix}-2=A-B\\ 2=A+B\end{Bmatrix} \rightarrow A=0 \quad , \quad B=2$$

Sustituyendo estos coeficientes en la integral:

$$\int\frac{(2x-1)}{(x-1)^3}dx=\int[\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}]dx=\int\left[\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}\right]dx$$

$$\int\left[\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}\right]dx=\frac{-2}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}+C$$

Raíces reales simples y múltiples en el denominador Q(x)

Este tercer caso es **composición de los dos anteriores**. El polinomio del denominador Q(x) lo factorizamos en sus distintas raíces reales simples como en sus raíces múltiples.

Ejemplo

$$\int \frac{3x+7}{x^3-x^2-x+1}dx=\int \frac{(3x+7)}{(x+1)(x-1)^2}dx$$

$$\frac{(3x+7)}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$3x+7=A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)$$

Si $x=1 \rightarrow 10=2C \rightarrow C=5$

Si $x=-1 \rightarrow 4=4A \rightarrow A=1$

Si $x=0 \rightarrow 7=1-B+5 \rightarrow B=-1$

Sustituyendo estos coeficientes en la integral:

$$\int \frac{3x+7}{x^3-x^2-x+1}dx=\int [\frac{1}{x+1}+\frac{-1}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^2}]dx=\ln|x+1|-\ln|x-1|-\frac{5}{x-1}+C$$

Ecuación cuadrática con solución real o compleja en el denominador Q(x)

En este cuarto supuesto el denominador queda expresado como una ecuación de segundo grado, con solución real o compleja.

Vamos a considerar dos tipos de integrales que cumplen estos requisitos: integrales con numerador P(x) igual a una constante y Q(x) un polinomio de grado dos, e integrales con numerador P(x) igual a un polinomio de grado uno y Q(x) de grado dos.

$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$ → Buscaremos arcotangente → $\frac{d[arcotg(f(x))]}{dx}=\frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$

$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ → Buscamos logaritmo → $\frac{d[\ln(f(x))]}{dx}=\frac{f'(x)}{f(x)}$

La idea de **buscar la forma de la derivada de la arcotangente o del logaritmo dentro de la integral puede aplicarse tanto si el polinomio del denominador admite soluciones complejas como reales**. Lógicamente, si la ecuación de segundo grado admite soluciones reales y somos capaces de obtenerlas, la integral quedaría reducida a alguno de los casos anteriormente descritos para raíces reales simples o múltiples.

Estos métodos son herramientas útiles, sabiendo que en algunas integrales se pueden acortar los pasos de solución sumando, restando, multiplicando y/o dividiendo factores... y esto solo se aprende con la práctica. Recordando que **integrar tiene un poco de arte**... y el arte tiene mucho de esfuerzo y trabajo, y una **pizca de inspiración**.

Ejemplo

$$\int \frac{1}{2x^2+x+2}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+\frac{x}{2}+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}+\frac{15}{16}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}}dx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{15}{16}+(\frac{4x+1}{4})^2}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{15}{16}\cdot[1+\frac{16}{15}\cdot(\frac{4x+1}{4})^2]}dx=\frac{16}{2\cdot 15}\int \frac{1}{1+(\frac{4x+1}{\sqrt{15}})^2}dx$$

$$\frac{8}{15}\int \frac{1}{1+(\frac{4x+1}{\sqrt{15}})^2}dx=\frac{8}{15}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\int \frac{\frac{4}{\sqrt{15}}}{1+(\frac{4x+1}{\sqrt{15}})^2}dx=\frac{2}{\sqrt{15}}\cdot arcotg(\frac{4x+1}{\sqrt{15}})+C$$

Ejemplo

$$\int \frac{x+5}{2x^2+x+2}dx=\frac{1}{4}\int \frac{4x+20}{2x^2+x+2}dx=\frac{1}{4}\int \frac{4x+1+19}{2x^2+x+2}dx=\frac{1}{4}\int \frac{4x+1}{2x^2+x+2}dx+\frac{1}{4}\int \frac{19}{2x^2+x+2}dx$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{4x+1}{2x^2+x+2}dx+\frac{1}{4}\int \frac{19}{2x^2+x+2}dx=\frac{1}{4}\ln|2x^2+x+2|+\frac{19}{4}\int \frac{1}{2x^2+x+2}dx+C$$

La integral que aparece en el segundo sumando es idéntica a la resuelta en el ejemplo anterior, por lo que escribimos directamente su solución final.

$$\frac{19}{4}\ln|2x^2+x+2|+\frac{19}{2\cdot\sqrt{15}}arcotg(\frac{4x+1}{\sqrt{15}})+C$$

Denominador Q(x) como producto de raíces reales y de ecuación cuadrática con solución real o compleja

Ahora el denominador queda expreado de la siguiente forma:

$$Q(x)=(x-x_1)(x-x_2)^n(ax^2+bx+c)$$

Es decir, estamos ante una integral que une todos los casos anteriores: el denominador se puede expresar como producto de raíces reales simples, por raíces reales múltiples y por ecuación cuadrática que admita solución real o compleja.

El cociente de polinomios de quedaría:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)^n(ax^2+bx+c)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+...+\frac{L}{(x-x_2)^n}+\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$$

Donde los distintos coeficientes $A, B, ...L, M, N$ se obtienen dando valores a la variable x .

Ejemplo

$$\int \frac{x+3}{x^3+x}dx=\int \frac{x+3}{x(x^2+1)}dx$$

$$\frac{x+3}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$x+3=A(1+x^2)+(Bx+C)x$$

Si $x=0 \rightarrow 3=A$

Si $x=1 \rightarrow 4=6+B+C$

Si $x=2 \rightarrow 5=15+4B+2C$

Con las dos últimas ecuaciones planteamos un sistema 2x2 de soluciones:

$B=-3$, $C=1$

Y la integral queda expresada como:

$$\int \frac{x+3}{x(x^2+1)}dx=\int \frac{3}{x}dx+\int \frac{-3x+1}{1+x^2}dx=3\cdot \ln|x|-3\int \frac{x}{1+x^2}dx+1\int \frac{x}{1+x^2}dx+C$$

$$3\cdot \ln|x|-\frac{3}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx+arcotg\, x+C=3\cdot \ln|x|-\frac{3}{2}\ln|1+x^2|+arcotg\, x+C$$

Grado del numerador P(x) mayor o igual que Grado del denominador Q(x)

Si dividimos el polinomio $P(x)$ entre $Q(x)$, obtenemos un cociente $C(x)$ y un resto $R(x)$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

Si la división es exacta, el resto es cero → $R(x)=0$ → La integral de la división de polinomios queda reducida a la integral de un polinomio $C(x)$, que es inmediata.

Si la división no es exacta → $R(x)\neq 0$ → La integral de la división de polinomios queda reducida a la integral de un polinomio $C(x)$ más la integral del cociente $\frac{R(x)}{Q(x)}$. Y el grado del resto $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$, por lo que estaremos ante uno de los casos desarrollados en el apartado anterior: división de polinomios con grado en el numerador menor que el grado en el denominador. Veamos un ejemplo.

$\int \frac{x^3+3}{x^2-1}dx$ → Hacemos la división de polinomios

Dividendo (numerador) → x^3+3

Divisor (denominador) → x^2-1

$$\begin{array}{r|l} x^3+3 & x^2-1 \\ \cline{2-2} -x^3+x & x \\ \cline{1-1} x+3 & \end{array}$$

Cociente → x

Resto → $x+3$

$$\frac{x^3+3}{x^2-1}=x+\frac{x+3}{x^2-1} \quad \rightarrow \quad \int \frac{x^3+3}{x^2-1}dx=\int \left(x+\frac{x+3}{x^2-1}\right)dx=\int x\,dx+\int \frac{x+3}{x^2-1}dx$$

Es decir, hemos convertido la integral de partida en la suma de dos integrales (una polinómica y otra un cociente de polinomios, con el grado del numerador menor que el grado del denominador).

$$\int x\,dx+\int \frac{x+3}{x^2-1}\,dx=\frac{x^2}{2}+\int \frac{x+3}{(x+1)(x-1)}\,dx$$

Aplicamos el método de los coeficientes indeterminados.

$$\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1} \quad \rightarrow \quad x+3=A(x-1)+B(x+1)$$

si $x=1 \quad \rightarrow \quad 4=2B \quad \rightarrow \quad B=2$

si $x=-1 \quad \rightarrow \quad 2=-2A \quad \rightarrow \quad A=-1$

$$\frac{x^2}{2}+\int \frac{x+3}{(x+1)(x-1)}\,dx=\frac{x^2}{2}+\int \frac{-1}{x+1}\,dx+\int \frac{2}{x-1}\,dx=\frac{x^2}{2}-\ln|x+1|+2\ln|x-1|+C$$