

## Teoría – Tema 5

# Integrales con productos de funciones trigonométricas

### Índice de contenido

Producto de seno por coseno expresado como suma de senos.....	2
Producto de seno por seno expresado como diferencia de cosenos.....	4
Producto de coseno por coseno expresado como suma de cosenos.....	6

## Producto de seno por coseno expresado como suma de senos

En 1º Bachillerato aprendimos las expresiones trigonométricas que relacionan sumas y diferencias de senos, y sumas y diferencias de cosenos, con productos de funciones trigonométricas. Puedes ver las demostraciones de las siguientes relaciones en:

<http://danipartal.net/pdf/1bachTema4Teoria01.pdf>

$$\operatorname{sen}(A) + \operatorname{sen}(B) = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen}(A) - \operatorname{sen}(B) = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\cos(A) + \cos(B) = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos(A) - \cos(B) = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

Supongamos que tenemos la siguiente integral indefinida:

$$\int \operatorname{sen}(mx) \cdot \cos(nx) dx$$

Con  $m, n \in \mathbb{R}$ . Tomando la expresión de la suma de senos podemos identificar:

$$\operatorname{sen}(A) + \operatorname{sen}(B) = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\frac{A+B}{2} = mx$$

$$\frac{A-B}{2} = nx$$

Despejando los valores  $A$  y  $B$ :

$$A = (m+n)x$$

$$B = (m-n)x$$

Podemos expresar la suma de senos de la forma:

$$\operatorname{sen}((m+n)x) + \operatorname{sen}((m-n)x) = 2 \operatorname{sen}(mx) \cdot \cos(nx)$$

Si llevamos esta relación a  $\int \operatorname{sen}(mx) \cdot \cos(nx) dx$  tendremos:

$$\int \operatorname{sen}(mx) \cdot \cos(nx) dx = \frac{1}{2} \int [\operatorname{sen}((m+n)x) + \operatorname{sen}((m-n)x)] dx$$

Por lo que la integral del producto del seno por el coseno queda como la integral de una suma de senos, que tiene solución inmediata.

### Ejemplo

$$\int \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(3x) dx = \frac{1}{2} \cdot \int [\operatorname{sen}(4x) + \operatorname{sen}(-2x)] dx = \frac{1}{2} \cdot \int [\operatorname{sen}(4x) - \operatorname{sen}(2x)] dx \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot \int [\operatorname{sen}(4x) - \operatorname{sen}(2x)] dx = \frac{1}{2} \cdot \left[ -\frac{1}{4} \cdot \cos(4x) + \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) \right] + C = -\frac{1}{8} \cdot \cos(4x) + \frac{1}{4} \cdot \cos(2x) + C$$

## Producto de seno por seno expresado como diferencia de cosenos

Supongamos que tenemos la siguiente integral indefinida:

$$\int \operatorname{sen}(m x) \cdot \operatorname{sen}(n x) dx$$

Con  $m, n \in \mathbb{R}$ . Tomando la expresión de la diferencia de cosenos podemos identificar:

$$\cos(A) - \cos(B) = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\frac{A+B}{2} = m x$$

$$\frac{A-B}{2} = n x$$

Despejando los valores  $A$  y  $B$ :

$$A = (m+n)x$$

$$B = (m-n)x$$

Podemos expresar la diferencia de cosenos de la forma:

$$\cos((m+n)x) - \cos((m-n)x) = -2 \operatorname{sen}(m x) \cdot \operatorname{sen}(n x)$$

Si llevamos esta relación a  $\int \operatorname{sen}(m x) \cdot \operatorname{sen}(n x) dx$  tendremos:

$$\int \operatorname{sen}(m x) \cdot \operatorname{sen}(n x) dx = -\frac{1}{2} \int [\cos((m+n)x) - \cos((m-n)x)] dx$$

Por lo que la integral del producto del seno por el seno queda como la integral de una diferencia de cosenos, que tiene solución inmediata.

**Ejemplo**

$$\int \operatorname{sen}^2(x) dx = \int \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) dx = -\frac{1}{2} \cdot \int [\cos(2x) - \cos(0)] dx = -\frac{1}{2} \cdot \int [\cos(2x) - 1] dx \rightarrow$$
$$-\frac{1}{2} \cdot \int [\cos(2x) - 1] dx = -\frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}(2x) - x \right] + C = -\frac{1}{4} \cdot \operatorname{sen}(2x) + \frac{x}{2} + C$$

## Producto de coseno por coseno expresado como suma de cosenos

Supongamos que tenemos la siguiente integral indefinida:

$$\int \cos(mx) \cdot \cos(nx) dx$$

Con  $m, n \in \mathbb{R}$ . Tomando la expresión de la suma de cosenos podemos identificar:

$$\cos(A) + \cos(B) = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\frac{A+B}{2} = mx$$

$$\frac{A-B}{2} = nx$$

Despejando los valores  $A$  y  $B$ :

$$A = (m+n)x$$

$$B = (m-n)x$$

Podemos expresar la suma de cosenos de la forma:

$$\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x) = 2 \cos(mx) \cdot \cos(nx)$$

Si llevamos esta relación a  $\int \cos(mx) \cdot \cos(nx) dx$  tendremos:

$$\int \cos(mx) \cdot \cos(nx) dx = \frac{1}{2} \int [\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)] dx$$

Por lo que la integral del producto del coseno por el coseno queda como la integral de una suma de cosenos, que tiene solución inmediata.

### Ejemplo

$$\int \cos(4x) \cdot \cos(6x) dx = \frac{1}{2} \cdot \int [\cos(10x) + \cos(-2x)] dx = \frac{1}{2} \cdot \int [\cos(10x) + \cos(2x)] dx$$

$$\frac{1}{2} \cdot \int [\cos(10x) + \cos(2x)] dx = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{10} \operatorname{sen}(10x) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) \right] + C = \frac{1}{20} \operatorname{sen}(10x) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + C$$