Teoría – Tema 5

Integrales con productos de funciones trigonométricas

Índice de contenido

Producto de seno por coseno expresado como suma de senos

En 1ºBachillerato aprendimos las expresiones trigonométricas que relacionan sumas y diferencias de senos, y sumas y diferencias de cosenos, con productos de funciones trigonométricas. Puedes ver las demostraciones de las siguientes relaciones en:

http://danipartal.net/pdf/1bachTema4Teoria01.pdf

$$sen(A)+sen(B)=2\,sen\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$sen(A)-sen(B)=2\cos\frac{A+B}{2}\cdot sen\frac{A-B}{2}$$

$$\cos(A)+\cos(B)=2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos(A)-\cos(B)=-2\,sen\frac{A+B}{2}\cdot sen\frac{A-B}{2}$$

Supongamos que tenemos la siguiente integral indefinida:

$$\int sen(m\,x)\cdot\cos(n\,x)dx$$

Con $m, n\in\mathbb{R}$. Tomando la expresión de la suma de senos podemos identificar:

$$sen(A)+sen(B)=2\,sen\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\frac{A+B}{2}=mx$$

$$\frac{A-B}{2}=nx$$

Despejando los valores A y B :

$$A=(m+n)x$$

$$B=(m-n)x$$

Podemos expresar la suma de senos de la forma:

$$sen((m+n)x)+sen((m-n)x)=2\,sen(m\,x)\cdot\cos(n\,x)$$

Si llevamos esta relación a $\int sen(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$ tendremos:

$$\int sen(m\,x)\cdot\cos(n\,x)dx=\frac{1}{2}\int[sen((m+n)x)+sen((m-n)x)]dx$$

Por lo que la integral del producto del seno por el coseno queda como la integral de una suma de senos, que tiene solución inmediata.

Ejemplo

$$\int sen(x)\cdot\cos(3x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int[sen(4x)+sen(-2x)]dx=\frac{1}{2}\cdot\int[sen(4x)-sen(2x)]dx\ \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cdot\int[sen(4x)-sen(2x)]dx=\frac{1}{2}\cdot[\frac{-1}{4}\cdot\cos(4x)+\frac{1}{2}\cdot\cos(2x)]+C=\frac{-1}{8}\cdot\cos(4x)+\frac{1}{4}\cdot\cos(2x)+C$$

Producto de seno por seno expresado como diferencia de cosenos

Supongamos que tenemos la siguiente integral indefinida:

$$\int sen(m\,x)\cdot sen(n\,x)\,dx$$

Con $m, n \in \mathbb{R}$. Tomando la expresión de la diferencia de cosenos podemos identificar:

$$\cos(A)-\cos(B)=-2\,sen\frac{A+B}{2}\cdot sen\frac{A-B}{2}$$

$$\frac{A+B}{2}=m\,x$$

$$\frac{A-B}{2}=n\,x$$

Despejando los valores A y B :

$$A=(m+n)x$$

$$B=(m-n)x$$

Podemos expresar la diferencia de cosenos de la forma:

$$\cos((m+n)x)-\cos((m-n)x)=-2\mathrm{sen}(m\,x)\cdot sen(n\,x)$$

Si llevamos esta relación a $\int sen(m\,x)\cdot sen(n\,x)\,dx$ tendremos:

$$\int sen(m\,x)\cdot sen(n\,x)\,dx=-\frac{1}{2}\int[\cos((m+n)x)-\cos((m-n)x)]\,dx$$

Por lo que la integral del producto del seno por el seno queda como la integral de una diferencia de cosenos, que tiene solución inmediata.

Ejemplo

$$\int sen^2(x)\,dx=\int sen(x)\cdot sen(x)\,dx=-\frac{1}{2}\cdot\int[\cos(2x)-\cos(0)]\,dx=-\frac{1}{2}\cdot\int[\cos(2x)-1]\,dx \quad \rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\int[\cos(2x)-1]\,dx=-\frac{1}{2}\cdot[\frac{1}{2}\cdot sen(2x)-x]+C=-\frac{1}{4}\cdot sen(2x)+\frac{x}{2}+C$$

Producto de coseno por coseno expresado como suma de cosenos

Supongamos que tenemos la siguiente integral indefinida:

$$\int \cos(m x)\cdot\cos(n x)\,dx$$

Con $m, n\in\mathbb{R}$. Tomando la expresión de la suma de cosenos podemos identificar:

$$\cos(A)+\cos(B)=2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\frac{A+B}{2}=m x$$

$$\frac{A-B}{2}=n x$$

Despejando los valores A y B :

$$A=(m+n)x$$

$$B=(m-n)x$$

Podemos expresar la suma de cosenos de la forma:

$$\cos((m+n)x)+\cos((m-n)x)=2\cos(m x)\cdot\cos(n x)$$

Si llevamos esta relación a $\int \cos(m x)\cdot\cos(n x)\,dx$ tendremos:

$$\int \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx=\frac{1}{2}\int[\cos((m+n)x)+\cos((m-n)x)]\,dx$$

Por lo que la integral del producto del coseno por el coseno queda como la integral de una suma de cosenos, que tiene solución inmediata.

Ejemplo

$$\int \cos(4x)\cdot\cos(6x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int[\cos(10x)+\cos(-2x)]\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int[\cos(10x)+\cos(2x)]\,dx$$

$$\frac{1}{2}\cdot\int[\cos(10x)+\cos(2x)]\,dx=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{10}sen(10x)+\frac{1}{2}sen(2x)\right]+C=\frac{1}{20}sen(10x)+\frac{1}{4}sen(2x)+C$$