Problemas – Tema 5

Solución a problemas de Integrales - Hoja 16 - Problemas 1

Hoja 16. Problema 1

Resuelve.

a) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f'(x)=(2x+1)e^{-x}$. Determina la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

b) $\int \frac{x^2}{x^2-6x+5}dx$

c) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f'(x)=\ln(x^2+1)$. Determina la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

a) Si $f(x)$ pasa por el origen de coordenadas → $f(0)=0$ → Con esta condición de contorno podremos determinar la constante de integración.

$f(x)=\int f'(x)dx \rightarrow f(x)=\int (2x+1)e^{-x}dx$ → Integramos por partes

$$u=2x+1 \rightarrow u'=2$$

$$v'=e^{-x} \rightarrow v=-e^{-x}$$

$$f(x)=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx=-(2x+1)e^{-x}+2\int e^{-x}dx=-(2x+1)e^{-x}-2e^{-x}+C$$

$$f(0)=0 \rightarrow -1-2+C=0 \rightarrow C=3 \rightarrow f(x)=-(2x+1)e^{-x}-2e^{-x}+3$$

b) $\int \frac{x^2}{x^2-6x+5}dx$ → Cociente de polinimios de igual grado. Hacemos la división de polinomios.

$$\frac{x^2}{x^2-6x+5}=1+\frac{6x-5}{x^2-6x+5} \rightarrow \int \frac{x^2}{x^2-6x+5}dx=\int dx+\int \frac{6x-5}{x^2-6x+5}dx=x+\int \frac{6x-5}{(x-1)(x-5)}dx$$

Al tener un nuevo cociente, con el grado del numerador menor que el grado del denominador, aplicamos el método de coeficientes indeterminados.

$$\int \frac{6x-5}{(x-1)(x-5)}dx=\int \frac{A}{x-1}dx+\int \frac{B}{x-5}dx$$

$$6x-5=A(x-5)+B(x-1)$$

$$x=1 \rightarrow 1=A(-4)+0 \rightarrow A=\frac{-1}{4}$$

$$x=5 \rightarrow 25=0+B(4) \rightarrow B=\frac{25}{4}$$

$$I=x-\frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx+\frac{25}{4}\int \frac{1}{x-5}dx=x-\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{25}{4}\ln|x-5|+C$$

c) Sea la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f'(x)=\ln(x^2+1)$. Determina la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

La condición de contorno es $f(0)=0$, con la que podremos resolver la constante de integración.

$$f(x)=\int f'(x)dx \rightarrow f(x)=\int \ln(x^2+1)dx$$

Aplicamos partes.

$$u=\ln(x^2+1) \rightarrow u'=\frac{2x}{x^2+1}$$

$$v'=1 \rightarrow v=x$$

$$f(x)=x\cdot\ln(x^2+1)-2\int \frac{x^2}{x^2+1}dx=x\cdot\ln(x^2+1)-2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$$

$$f(x)=x\cdot\ln(x^2+1)-2\int dx+2\int \frac{1}{x^2+1}dx=x\cdot\ln(x^2+1)-2x+2\,arctg(x)+C$$

$$f(0)=0 \rightarrow 0-0+0+C=0 \rightarrow C=0 \rightarrow f(x)=x\cdot\ln(x^2+1)-2x+2\,arctg(x)$$