Problemas – Tema 5

Solución a problemas de Integrales - Hoja 15 - Problemas 1

Hoja 15. Problema 1

Resuelve.

a) $\int [1-\ln(x+1)]dx$

b) $\int \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}dx$

c) Determina la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ **tal que** $f''(x)=\frac{1}{x}$ **y su gráfica tiene tangente horizontal en el punto** $P(1,1)$ **.**

a) $I=\int [1-\ln(x+1)]dx=\int dx-\int \ln(x+1)dx=x-\int \ln(x+1)dx$

Aplicamos partes en la integral que queda por resolver.

$$\int \ln(x+1)dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx$$

$$u=\ln(x+1) \quad\to\quad u'=\frac{1}{x+1}$$

$$v'=1 \quad\to\quad v=x$$

$$\int \ln(x+1)dx=x\cdot\ln(x+1)-\int \frac{x}{x+1}dx=x\cdot\ln(x+1)-\int \frac{x+1-1}{x+1}dx$$

$$\int \ln(x+1)dx=x\cdot\ln(x+1)-\int \frac{x+1}{x+1}dx+\int \frac{1}{x+1}dx=x\cdot\ln(x+1)-\int dx+\int \frac{1}{x+1}dx$$

$$\int \ln(x+1)dx=x\cdot\ln(x+1)-x+\ln|x+1|=\ln|x+1|\cdot(x+1)-x$$

Sustituimos este valor en la integral de partida, añadiendo la constante de integración.

$$I=x-\ln|x+1|\cdot(x+1)+x+C=2x-\ln|x+1|\cdot(x+1)+C$$

b) $\int \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)} dx$

Aplicamos el siguiente cambio de variable → $e^x = t \rightarrow e^x dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$

$$I = \int \frac{t}{(t^2-1)(t+1)} \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{(t+1)(t-1)(t+1)} dt = \int \frac{1}{(t+1)^2(t-1)} dt$$

Llegamos a un cociente de polinomios, con grado del numerador menor que el grado del denominador. En el denominador tenemos una raíz doble y una raíz simple, por lo que aplicamos el método de los coeficientes indeterminados.

$$\int \frac{1}{(t+1)^2(t-1)} dt = \int \frac{A}{t+1} dt + \int \frac{B}{(t+1)^2} dt + \int \frac{C}{t-1} dt$$

$$1 = A(t+1)(t-1) + B(t-1) + C(t+1)^2$$

$$t=1 \rightarrow 1 = 0+0+C(2)^2 \rightarrow C = \frac{1}{4}$$

$$t=-1 \rightarrow 1 = 0+B(-2)+0 \rightarrow B = \frac{-1}{2}$$

$$t=0 \rightarrow 1 = A(1)(-1)+B(-1)+C(1)^2 \rightarrow 1 = -A+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \rightarrow A = \frac{-1}{4}$$

$$I = \frac{-1}{4}\int \frac{1}{t+1} dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t+1)^2} dt + \frac{1}{4}\int \frac{1}{t-1} dt = \frac{-1}{4}\ln|t+1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+1} + \frac{1}{4}\ln|t-1| + C$$

Deshacemos el cambio de variable $e^x = t$

$$I = \frac{-1}{4}\ln|e^x+1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^x+1} + \frac{1}{4}\ln|e^x-1| + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^x+1} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C$$

c) Determina la función $f:(0,+\infty)\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f''(x)=\frac{1}{x}$ y su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1,1)$.

La condición de la rcta tangente del enunciado nos dice que $f'(1)=0$. Además sabemos que la función pasa por $P(1,1)$, porlo que se cumple $f(1)=1$.

Integramos dos veces y aplicamos las correspondientes condiciones de contorno.

$$f'(x)=\int f''(x)\,dx \quad\rightarrow\quad f'(x)=\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$$

$$f'(1)=0 \quad\rightarrow\quad \ln(1)+C=0 \quad\rightarrow\quad C=0 \quad\rightarrow\quad f'(x)=\ln|x|$$

Integramos nuevamente.

$$f(x)=\int f'(x)\,dx \quad\rightarrow\quad f(x)=\int \ln|x|\,dx$$

Aplicamos partes.

$$u=\ln(x) \quad\rightarrow\quad u'(x)=\frac{1}{x}$$

$$v'=1 \quad\rightarrow\quad v(x)=x$$

$$f(x)=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx=x\cdot\ln(x)-\int \frac{x}{x}dx=x\cdot\ln(x)-\int dx=x\cdot\ln(x)-x+D$$

Aplicamos la segunda condición de contorno $f(1)=1$.

$$1\cdot\ln(1)-1+D \quad\rightarrow\quad D=1 \quad\rightarrow\quad f(x)=x\cdot\ln(x)-x+1$$