

## Teoría – Tema 4

# Ampliación - Infinitésimos

### Índice de contenido

¿Qué son los infinitésimos?.....	2
Infinitésimo de la exponencial y el logaritmo para $x \rightarrow 0$ .....	4
Infinitésimo de las funciones seno, coseno y tangente para $x \rightarrow 0$ .....	5
Infinitésimo de la potencia y la raíz n-ésima para $x \rightarrow 0$ .....	6
Generalizar el uso de infinitésimos para $x$ tendiendo a valores distintos de 0.....	7
¿Cuándo usar la aproximación asintótica de infinitésimos?.....	8

## ¿Qué son los infinitésimos?

Una función  $f(x)$  toma un valor **infinitésimo** en  $a$  si el límite de la función en ese punto es cero:

$$f(x) \text{ es infinitésimo en } a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

Conforme nos acercamos al punto  $x=a$  la función toma un valor infinitesimalmente pequeño (prácticamente 0). Y este comportamiento de  $f(x)$  en  $a$  coincide, en algunos casos prácticos que veremos más adelante, con el comportamiento de funciones "más sencillas" a las que podemos aproximar  $f(x)$  cuando estudiemos su valor en  $a$ .

$$f(x) \text{ se comporta como } g(x) \text{ en } a \implies f(x) \simeq g(x) \text{ en } a \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \rightarrow 1$$

Es decir:  $f(x)$  va a 0 con la "misma rapidez" con que lo hace su aproximación  $g(x)$  en  $a$ . Y si la forma analítica de  $g(x)$  es más sencilla que la forma de  $f(x)$ , puede ser más práctico emplear  $g(x)$  en vez de  $f(x)$  a la hora de operar con otras funciones, calcular límites, etc.

¿Cómo obtener la **forma analítica de esta aproximación**  $g(x)$  ?

Una posible respuesta a esta pregunta son los **polinomios de Taylor**. Nosotros los vamos a utilizar para estudiar el comportamiento de  $f(x)$  en el punto  $a=0$ .

Como ya aplicamos en la definición de derivada sobre funciones elementales, los polinomios de Taylor son muy útiles a la hora de aproximar funciones elementales  $f(x)$  a polinomios  $(x-x_0)^n$  (llamados series de potencias).

Cuántos más términos tomemos en la serie de potencias, más precisa será la aproximación y más se parecerá la curva del polinomio de Taylor a la curva de la función original  $f(x)$ .

El valor  $x_0$  que aparece en  $(x-x_0)^n$  pertenece al dominio de la función  $f(x)$  y es el punto alrededor del cual se desarrolla la serie de potencias. Por facilidad en los cálculos, es común tomar  $x_0=0$  como centro de la serie de potencias.

Si tras aproximar  $f(x)$  al polinomio de Taylor centrado en  $x_0=0$ , tomamos  $x \rightarrow 0$  (donde  $x$  aparece en el argumento de la función  $f(x)$  y en el argumento del polinomio de Taylor) podremos **truncar la serie de potencias** del polinomio de Taylor y quedarnos (en determinados casos) con los términos más grandes, "despreciando" los términos más pequeños. Esta serie truncada nos dará la aproximación  $g(x)$ .

Así estimaremos que  $f(x)$  **tiende de manera asintótica** a  $g(x)$  cuando  $x \rightarrow 0$ .

A continuación mostramos, siguiendo este razonamiento, los valores  $g(x)$  a los que podemos aproximar determinadas funciones elementales en las proximidades de  $x=0$  .

## ■ Infinitésimo de la exponencial y el logaritmo para $x \rightarrow 0$

La función exponencial se aproxima como serie de potencias a:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Por lo tanto: si  $x \rightarrow 0 \implies 1+x \gg \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \implies e^x \simeq 1+x \implies e^x - 1 \simeq x$

Es decir:  $e^x - 1$  se comporta asintóticamente en  $x \rightarrow 0$  como  $x$ . O lo que es lo mismo:  $e^x$  se comporta asintóticamente en  $x \rightarrow 0$  como  $1+x$ .

El logaritmo no podemos evaluarlo en 0, pero sí en 1. Por lo tanto:

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Por lo tanto: si  $x \rightarrow 0 \implies x \gg \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \implies \ln(x+1) \simeq x$

Es decir:  $\ln(x+1)$  se comporta asintóticamente en  $x \rightarrow 0$  como  $x$ .

## Infinitésimo de las funciones seno, coseno y tangente para $x \rightarrow 0$

Las funciones seno y coseno aproximan a:

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\operatorname{cos}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Para valores próximos a cero, podemos realizar las siguientes aproximaciones:

$$x \rightarrow 0 \implies x \gg \frac{-x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \implies \operatorname{sen}(x) \simeq x$$

$$x \rightarrow 0 \implies 1 \gg \frac{-x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \implies \operatorname{cos}(x) \simeq 1 \implies \operatorname{cos}(x) - 1 \simeq 0$$

Y la función tangente podemos expresarla como cociente de la función seno y la función coseno:

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)} \implies \text{si } x \rightarrow 0 \implies \operatorname{tg}(x) \simeq x$$

Además, en el estudio de límites aparecen con frecuencia las siguientes expresiones, que podemos aproximar a infinitésimos haciendo uso de las series de potencia del seno y el coseno:

$$1 - \operatorname{cos}(x) \implies \text{si } x \rightarrow 0 \implies 1 - \operatorname{cos}(x) \simeq \frac{x^2}{2}$$

$$\operatorname{arcosen}(x) \implies \text{si } x \rightarrow 0 \implies \operatorname{arcosen}(x) \simeq x$$

$$\operatorname{arcotg}(x) \implies \text{si } x \rightarrow 0 \implies \operatorname{arcotg}(x) \simeq x$$

## ■ Infinitésimo de la potencia y la raíz n-ésima para $x \rightarrow 0$

La potencia  $f(x)=(1+x)^n$  podemos aproximarla al polinomio de Taylor:

$$(1+x)^n = 1 + n \cdot x + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} x^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{n!}{n!} x^n$$

Donde el valor de la derivada de orden  $n+1$  es 0 para un polinomio de grado  $x^n$ , por lo que los términos de la serie de potencias se hacen nulos desde  $x^{n+1}$  en adelante.

Por lo tanto: si  $x \rightarrow 0 \implies 1+n \cdot x \gg \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{n!}{n!} x^n \implies (1+x)^n \simeq 1+n \cdot x$

Para la raíz n-ésima  $f(x)=\sqrt[n]{1+x}$  tendremos la siguiente aproximación:

$$\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + \frac{1-n}{n^2} x^2 + \dots$$

Por lo tanto: si  $x \rightarrow 0 \implies 1 + \frac{x}{n} \gg \frac{1-n}{n^2} x^2 + \dots \implies \sqrt[n]{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{n}$

## Generalizar el uso de infinitésimos para $x$ tendiendo a valores distintos de 0

Por la propia definición de infinitésimo podemos emplear su aproximación cuando  $x$  tienda a valores distintos de 0. Las condiciones que deben mantenerse es que  $f(x)$  se haga 0 en el valor  $x$  que estemos estudiando, y que el límite del cociente entre  $f(x)$  y su aproximación  $g(x)$  en  $x \rightarrow a$  converja a 1 .

De esta manera, según lo demostrado en los apartados anteriores, los siguientes ejemplos son infinitésimos válidos:

$$\text{si } x \rightarrow 1 \implies \ln x \simeq x - 1$$

$$\text{si } x \rightarrow \frac{\pi}{2} \implies \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \simeq x - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{si } x \rightarrow 1 \implies e^{(1-x)} - 1 \simeq 1 - x$$

## ¿Cúando usar la aproximación asintótica de infinitésimos?

Los infinitésimos son una aproximación: cuando  $f(x)$  se acerca al punto  $x=a$  su valor se hace 0 y su comportamiento se aproxima al de  $g(x)$ . Y **toda aproximación tiene sus limitaciones**.

Los infinitésimos son muy útiles en el estudio de ciertos límites con indeterminación  $\frac{0}{0}$ .

Su aproximación permite, a veces, eliminar la indeterminación y obtener el resultado final del límite.

**¿Cuándo aplicar infinitésimos?** Si  $f(x)$  se encuentra multiplicando o dividiendo en un límite con  $x \rightarrow a$ , podremos sustituir  $f(x) \simeq g(x)$ .

Pero si  $f(x)$  se encuentra sumando o restando, por lo general, la aproximación a  $g(x)$  no será válida. Solo en casos muy concretos, que aprenderemos con la práctica, podremos sustituir  $f(x)$  por su aproximación  $g(x)$  dentro de una suma o una resta (siempre y cuando la aproximación tenga sentido al comparar  $g(x)$  con el resto de sumandos).

### Ejemplo

$$\text{si } x \rightarrow 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) + e^x - 1}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \simeq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2$$

La aproximación del seno y la exponencial por infinitésimos es coherente porque sumamos términos infinitésimos del mismo orden ( $x+x$ ).

### Ejemplo

$$\text{si } x \rightarrow 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \text{sen}^2 x}{x^4} = \left[ \frac{0}{0} \right] \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^4} = 0 \implies \text{aproximación no válida}$$

Al aproximar  $\text{sen}(x)$  a su infinitésimo  $x$  estamos obviando, entre otros, un término del polinomio de Taylor de grado  $x^3$  que no es despreciable frente al primer término  $x^2$  de la resta del numerador.

¿Qué hacer en estos casos? Recurrir a otros métodos. Por ejemplo, **L'Hôpital**.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \text{sen}^2 x}{x^4} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2 \text{sen}(x) \cos(x)}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \text{sen}(2x)}{4x^3} = \left[ \frac{0}{0} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos(2x)}{12x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \text{sen}(2x)}{24x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \cos(2x)}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$