Problemas – Tema 4

Solución a problemas de Repaso y Ampliación 1ª Evaluación - Hoja 07 - Problemas 2

Hoja 7. Problema 2

Resuelto por Alberto Jiménez Molina (enero 2015)

2. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en $[0,1]$, tales que $f(0)>g(0)$ y $f(1)<g(1)$. Demostrar que sus gráficas se cortan.

Proponemos dos formas de demostrarlo.

Demostración 1

Empecemos suponiendo que en el intervalo [0,1] no hay una solución.

Primero dividamos el intervalo por la mitad en el punto medio x=1/2 donde veremos su imagen en f(x) y g(x).

Si g(1/2)=f(1/2) ya hemos acabado de demostrar que existe un punto donde se cortan, por lo que la hipótesis de partida sería falsa.

Si g(1/2) no es igual a f(1/2) podemos tomar otro intervalo donde se cambia la relación de las funciones de mayor a menor ya sea [0,1/2] o [1/2,1].

A partir de esto podemos repetir este proceso de forma sucesiva (Postulado de Cantor) hasta que converja en un punto $\alpha\in(0,1)$. Si este valor $\alpha\in(0,1)$ cumple $f(\alpha)>g(\alpha)$ ó $f(\alpha)<g(\alpha)$, como la función es continua en todo el intervalo y en consecuencia continua en α , existirá un entorno alrededor de α donde los puntos son todos $f(\alpha+\delta)>g(\alpha+\delta)$ ó todos $f(\alpha+\delta)<g(\alpha+\delta)$.

Ahí llegamos a una contradicción, puesto que α lo hemos obtenido como intersección de sucesivos intervalos donde la función cambia de $f(x)>g(x)$ a $f(x)<g(x)$ en los extremos de los intervalos. Y por otro lado, por continuidad, existe un entorno alrededor de α donde todos los puntos de ese entorno cumplen que $f(x)>g(x)$ ó $f(x)<g(x)$, peor sin cambiar de signo al evaluar en los extremos del intervalo.

Por lo tanto la hipótesis de partida es falsa y f(x) y g(x) tiene una solución en el intervalo abierto (0,1): $\exists c \in (0,1) / f(c) = g(c)$

<u>Demostración 1</u>

Creamos la función auxiliar $h(x) = f(x) - g(x)$. Esta función es continua en $[0,1]$ por ser diferencia de dos funciones que sabemos que son continuas en ese intervalo. Además, según las condiciones del enunciado:

$h(0) = f(0) - g(0) > 0$

$h(1) = f(1) - g(1) < 0$

Por lo que estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Bolzano:

$\exists c \in (0,1) / h(c) = 0 \rightarrow \exists c \in (0,1) / f(c) - g(c) = 0 \rightarrow \exists c \in (0,1) / f(c) = g(c)$