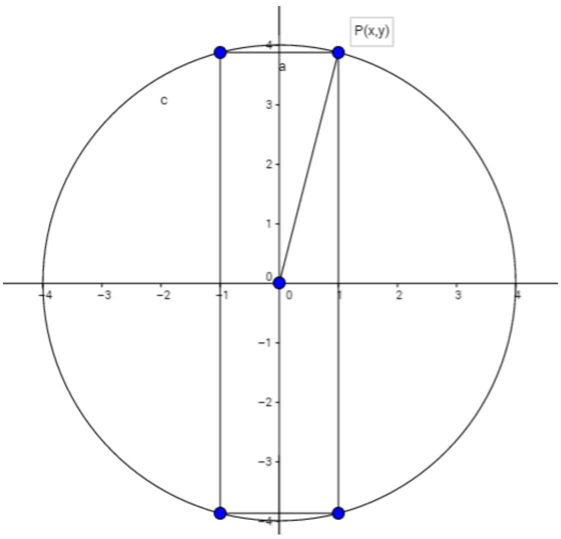
Problemas – Tema 4

Solución a problemas de Repaso y Ampliación 1ª Evaluación - Hoja 14 - Todos resueltos

Hoja 14. Problema 1

1. Sea la circunferencia centrada en el origen y radio 4 unidades, de ecuación $x^2+y^2=16$. Sea el rectángulo de lados paralelos a los ejes cartesianos y vértices sobre la circunferencia. Con estas condiciones, obtener las dimensiones del rectángulo de área máxima mediante un problema de optimización. Calcular dicha área máxima.



Tomando como referencia la imagen superior, el rectángulo inscrito tendrá como área:

$$A=2x\cdot 2y=4xy$$

Donde $P(x,y)$ representa las coordenadas del vértice del rectángulo del primer cuadrante. Si el radio de la circunferencia es 4, por Pitágoras:

$16=x^2+y^2 \rightarrow y=\sqrt{16-x^2}$ → Tomamos la solución positiva por ser primer cuadrante

Llevamos este valor a la fórmula del área:

$$A=4x\cdot\sqrt{16-x^2} \quad\rightarrow\quad A'=4\cdot\left[\sqrt{16-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}\right]=4\cdot\frac{2(16-x^2)-2x^2}{2\sqrt{16-x^2}}$$

$$A'=4\cdot\frac{16-x^2-x^2}{\sqrt{16-x^2}}=4\cdot\frac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}} \quad , \quad A'=0 \quad\rightarrow\quad 16-2x^2=0 \quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{8}$$

El dominio de la función $A=4x\cdot\sqrt{16-x^2}$ es $[-4,4]$, para que el discriminante de la raíz no sea negativo. Los valores de x tienen sentido físico si son positivos, por lo que evaluamos la primera derivada en los siguientes intervalos.

Función $A(x)$	$A(x)\uparrow$	$A(x)\downarrow$
Intervalos	$(0,\sqrt{8})$	$(\sqrt{8},4)$
Derivada $A'(x)$	$A'(1)>0$	$A'(3)<0$

Por lo tanto $x=\sqrt{8}$ es un máximo relativo de la función área → $y=\sqrt{16-x^2}=\sqrt{8}$

El área máxima resulta → $A(x=\sqrt{8})=4\sqrt{8}\cdot\sqrt{16-8}=4\cdot 8=32 \ \ u^2$

Hoja 14. Problema 2

2. Una empresa de tomate en salsa quiere fabricar latas cilíndricas de volumen constante igual a V. ¿Cuál es el valor del radio r de la base de la lata y el valor de su altura h, para que la construcción requiera la menor superficie de material? Si el precio de 1 unidad cuadrada de superficie es de $0{,}50€$, ¿cuánto cuesta fabricar esa lata de menor superficie?

La función a minimizar es el área del cilindro.

$$A=2\cdot A_{base}+A_{lateral}=2\cdot\pi\cdot r^2+2\cdot\pi\cdot r\cdot h$$

Volumen de un cilindro → $V=\pi\cdot r^2\cdot h$ → $h=\frac{V}{\pi\cdot r^2}$ → Llevamos este resultado a la función área, recordando que V es un valor constante.

$$A=2\cdot\pi\cdot r^2+\frac{2V}{r} \quad\rightarrow\quad A'=4\pi r-\frac{2V}{r^2}=\frac{4\pi r^3-2V}{r^2}$$

$A'=0 \quad\rightarrow\quad 4\pi r^3-2V=0 \quad\rightarrow\quad r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ → punto crítico

Para demostrar si estamos ante un mínimo relativo, calculamos la segunda derivada.

$A'=4\pi r-\frac{2V}{r^2} \quad\rightarrow\quad A''=4\pi+\frac{4V}{r^3}>0$ → siempre positivo, ya que el volumen y el radio tienen sentido físico si son positivos → $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ es un mínimo relativo.

Si el área es $A=2\cdot\pi\cdot r^2+\frac{2V}{r}=\frac{2\pi r^3+2V}{r}$, podemos obtener su valor máximo:

$$A\left(r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)=\frac{V+2V}{\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}=3\cdot\sqrt[3]{2\pi}\cdot\frac{V}{\sqrt[3]{V}}=3\cdot\sqrt[3]{2\pi}\cdot\sqrt[3]{V^2}=3\cdot\sqrt[3]{2\pi V^2}\ \ u^2$$

Si una unidad cuadrada cuesta $0{,}50€$ → Precio → $P=\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{2\pi V^2}\ \ €$

Hoja 14. Problema 3

3. $\lim_{x \to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

$\lim_{x \to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = \frac{0}{0}$ → Indeterminación → L'Hôpital

$$\lim_{x \to 64} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \lim_{x \to 64} \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 64} \frac{3}{2} \cdot \sqrt[6]{x} = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$$

Hoja 14. Problema 4

4. $\lim_{x \to 0} \frac{1-2x-e^x+sen(3x)}{x^2}$

$\lim_{x \to 0} \frac{1-2x-e^x+sen(3x)}{x^2}=\frac{0}{0}$ → Indeterminación → L'Hôpital

$\lim_{x \to 0} \frac{-2-e^x+3\cos(3x)}{2x}=\frac{0}{0}$ Indeterminación → L'Hôpital

$\lim_{x \to 0} \frac{-e^x-9\,sen(3x)}{2}=\frac{-1}{2}$

Hoja 14. Problema 5

5. $\lim_{x \to \pi} \frac{1-sen\left(\frac{x}{2}\right)}{(x-\pi)^2}$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{1-sen\left(\frac{x}{2}\right)}{(x-\pi)^2}=\frac{0}{0} \quad \to \text{Indeterminación} \to \text{L'Hôpital}$$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\frac{-1}{2}\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2(x-\pi)}=\frac{0}{0} \quad \to \text{Indeterminación} \to \text{L'Hôpital}$$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\frac{1}{4}\cdot sen\left(\frac{x}{2}\right)}{2}=\frac{1}{8}$$

Hoja 14. Problema 6

6. Obtener la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)=\left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)^2$ **en su punto de inflexión.**

Los puntos candidatos a puntos de inflexión anulan la segunda derivada.

$$f(x)=\left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)^2$$

$$f'(x)=2\cdot\left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)\cdot\left(\frac{(3\cdot(7-9x))-[(3x-2)\cdot(-9)]}{(7-9x)^2}\right)$$

$$f'(x)=2\cdot\left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)\cdot\left(\frac{21-27x+27x-18}{(7-9x)^2}\right)$$

$$f'(x)=2\cdot\left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)\cdot\left(\frac{3}{(7-9x)^2}\right)$$

$$f'(x)=\frac{18x-12}{(7-9x)^3}$$

$$f''(x)=\frac{18\cdot(7-9x)^3-(18x-12)\cdot 3\cdot(7-9x)^2\cdot(-9)}{(7-9x)^6}$$

$$f''(x)=\frac{(7-9x)^2\cdot[18\cdot(7-9x)-(18x-12)\cdot 3\cdot(-9)]}{(7-9x)^6}$$

$$f''(x)=\frac{126-162x-(18x-12)\cdot(-27)}{(7-9x)^4}$$

$$f''(x)=\frac{126-162x+486x-324}{(7-9x)^4}=\frac{324x-198}{(7-9x)^4}=\frac{18(18x-11)}{(7-9x)^4}$$

$$f''(x)=0\rightarrow\frac{18(18x-11)}{(7-9x)^4}=0\rightarrow 18(18x-11)=0\rightarrow x=\frac{11}{18}\simeq 0{,}61$$

Ya tenemos candidato a punto de inflexión. La función de partida está definida en toda la recta real salvo en $x=\frac{7}{9}\simeq 0{,}77$, valor que anula al denominador, por lo que evaluamos la segunda derivada en los siguientes intervalos.

$$(-\infty, \frac{11}{18}) \rightarrow f''(0)<0 \rightarrow f(x)\cap$$

$$(\frac{11}{18}, \frac{7}{9}) \rightarrow f''(0)>0 \rightarrow f(x)\cup$$

Por lo tanto, $x=\frac{11}{18}$ es punto de inflexión. Su imagen es:

$$f\left(\frac{11}{18}\right)=\left(\frac{3\cdot\left(\frac{11}{18}\right)-2}{7-9\cdot\left(\frac{11}{18}\right)}\right)^2=\left(\frac{\frac{-3}{18}}{\frac{27}{18}}\right)^2=\left(\frac{-3}{18}:\frac{27}{18}\right)^2=(\frac{54}{486})^2=(\frac{3}{27})^2=\frac{1}{81}$$

Las coordenadas del punto son $(\frac{11}{18}, \frac{1}{81})$. La pendiente de la recta tangente en este punto coincide con el valor de la derivada evaluada en la abscisa del punto:

$$f'(x)=\frac{18x-12}{(7-9x)^3}$$

$$f'(\frac{11}{18})=\frac{18\cdot\frac{11}{18}-12}{(7-9\cdot\frac{11}{18})^3}=\frac{-1}{(\frac{3}{2})^3}=\frac{-8}{27}$$

La ecuación punto pendiente de la recta resulta:

$$\frac{y-\frac{1}{81}}{x-\frac{11}{18}}=\frac{-8}{27}$$

Hoja 14. Problema 7

7. Es la función $f(x)=\begin{Bmatrix} sen(x) & si & -2\pi \leq x<0 \\ x^2-2x & si & 0<x<3 \end{Bmatrix}$ **derivable** $x=0$ **?**

La función no está definida en $x=0$, por lo tanto no será continua en ese punto y, en consecuencia, no puede ser derivable.

Hoja 14. Problema 8

8. Calcula el área del triángulo que forma el eje horizontal OX con las rectas tangente y normal a la función $f(x)=-x^2$ en el punto $x=1$.

Obtengamos, en primer lugar, la recta tangente a la función en $x=1$.

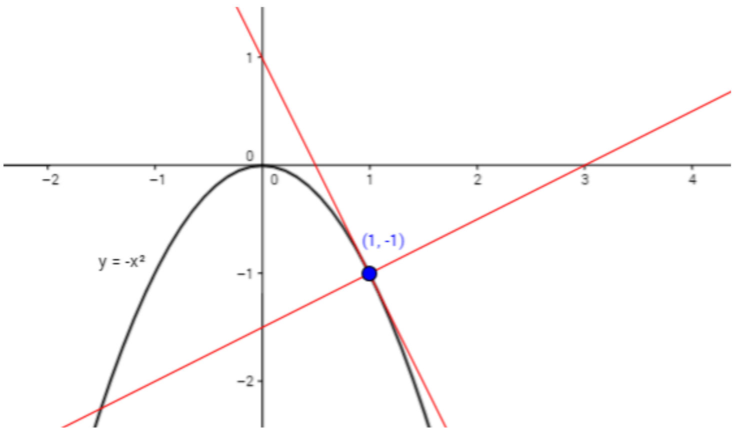
$x=1 \rightarrow f(1)=-1 \rightarrow$ punto $(1,-1)$

$f'(x)=-2x \rightarrow f'(1)=-2 \rightarrow$ pendiente de la recta tangente $m=-2$

Ecuación de la recta tangente en $x=1 \rightarrow \frac{y+1}{x-1}=-2 \rightarrow y=-2x+1$

La pendiente de la recta normal en $x=1$ es $\frac{1}{2}$, ya que el producto de las pendientes de las rectas tangente y normal es igual a -1 . Por lo tanto su ecuación resulta:

Recta normal en $x=1 \rightarrow \frac{y+1}{x-1}=\frac{1}{2} \rightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$



El triángulo que forman ambas rectas tiene como base la distancia entre los puntos de corte con el eje horizontal de ambas rectas, y altura igual a 1 (valor absoluto de la ordenada del punto $(1,-1)$).

Con estos datos, podremos obtener el área como $A=\frac{base \cdot altura}{2}$

Si $y=0$, $y=-2x+1 \rightarrow x=\frac{1}{2}$

Si $y=0$, $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \rightarrow x=3$

Base del triángulo → $|3-\frac{1}{2}|=\frac{5}{2}$

$$A=\frac{\frac{5}{2}\cdot 1}{2}=\frac{5}{4}\ u^2$$