Problemas – Tema 4

Solución a problemas de Repaso y Ampliación 1ª Evaluación - Hoja 13 - Problemas 4, 6

Hoja 13. Problema 4

4. Obtener m **para que la función** $f(x)=\left\{\begin{matrix} m(x+1)e^{2x} & si \quad x\leq 0 \\ \dfrac{(x+1)sen(x)}{x} & si \quad x>0 \end{matrix}\right\}$ **sea continua en** $x=0$ **.**

Las condiciones de continuidad en un punto son:

$$f(0)=m$$

$$\lim_{x\to 0^-}(m(x+1)e^{2x})=m$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)sen(x)}{x}=\frac{0}{0}$$ → Indeterminación →

Aplicamos infinitésimos en el seno → $\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)sen(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)x}{x}=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$

Los límites laterales coinciden si $m=1 \quad \rightarrow \quad límite \quad L=m$

$f(0)=m=L$

La función es continua en $x=0$ si $m=1$.

Hoja 13. Problema 6

6. Sea $f(x)=\begin{cases} a+\ln(1-x) & si \quad x<0 \\ x^2 e^{-x} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$ **.**

a) Calcula a **para que la función sea continua en toda la recta real.**

b) Estudiar la derivabilidad de la función.

a) Continuidad en los intervalos abiertos.

$(-\infty,0) \rightarrow \quad f(x)=a+\ln(1-x) \rightarrow$ Es continua ya que al argumento del logaritmo siempre es positivo en el intervalo $(-\infty,0)$.

$(0,\infty) \rightarrow \quad f(x)=x^2 e^{-x} \rightarrow$ Es continua por ser producto de polinomio y exponencial, que son funciones continuas en toda la recta real.

Continuidad en el punto frontera.

$x=0 \rightarrow \quad f(0)=0$

$\lim_{x\to 0^-}(a+\ln(1-x))=a$

$\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{-x}=0$

Por continuidad los límites laterales deben ser iguales $\rightarrow \quad 0=a \rightarrow$ límite $L=0$

$f(0)=0=L \rightarrow$ la función es continua en $x=0$ si $0=a$

b) La función es continua en toda la recta real. Estudiamos ahora su derivabilidad.

Derivabilidad en los intervalos abiertos.

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{1-x} & si \quad x<0 \\ 2xe^{-x}-x^2e^{-x} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

$(-\infty,0) \rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{-1}{1-x} \rightarrow \quad f'(x)$ es continua ya que el denominador no se anula en el intervalo $(-\infty,0) \rightarrow \quad f(x)$ es derivable.

$(0,\infty) \rightarrow \quad f(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x} \rightarrow \quad f'(x)$ es continua por ser producto y suma de funciones continuas en toda la recta real (polinomio y exponencial) $\rightarrow \quad f(x)$ es derivable.

Derivabilidad en el punto frontera.

$x=0$

$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{1-x}=-1$

$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^-}(2xe^{-x}-x^2e^{-x})=0$

$-1\neq 0$ → las derivadas laterales no coinciden → la función no es derivable en $x=0$.