Problemas – Tema 4

Solución a problemas de Repaso y Ampliación 1ª Evaluación - Hoja 12 - Problema 4, 5, 6, 7

Hoja 12. Problema 4

4. Dada $f(x)=\frac{\cos(x^3+2x^2+3x)}{\sqrt{x^2+x+2}}$ **, demuestra que existe un valor** $\alpha\in(-2,1)/f'(\alpha)=0$

$f(-2)=\frac{\cos(-8+8-6)}{\sqrt{4-2+2}}=\frac{\cos(-6)}{2}=\frac{\cos(6)}{2}$ → ya que el coseno es función par

$f(1)=\frac{\cos(1+2+3)}{\sqrt{1+1+2}}=\frac{\cos(6)}{2}$

$f(-2)=f(1)$

Además, nuestra función es continua en toda la recta real ya que el coseno es continuo en todo $\mathbb{R}$ y el discriminante de la raíz siempre es positivo. En particular, la función es continua en $[-2,1]$.

$$f'(x)=\frac{-sen(x^3+2x^2+3x)\cdot(3x^2+4x+3)\cdot\sqrt{x^3+x+2}-\cos(x^3+2x^2+3x)\cdot\frac{3x^2+4x+3}{2\sqrt{x^3+x+2}}}{x^2+x+2}$$

La función derivada es continua en toda la recta real, porque así lo son la función coseno, los polinomios y las raíces que aparecen en su expresión. Además, el denominador nunca se anula. Por lo tanto, $f(x)$ es derivable en todo $\mathbb{R}$.

Con esto, se cumplen todas las condiciones del teorema de Rolle, que afirma:

$\exists\alpha\in(-2,1)/f'(\alpha)=0$

Hoja 12. Problema 5

5. Utiliza el teorema de Bolzano y el teorema de Rolle para probar que $x^4-2x^3-1=0$ solo tiene una solución negativa.

Demostremos, en primer lugar, la existencia de al menos una solución negativa de la ecuación. Esta solución será un punto de corte de la función $f(x)=x^4-2x^3-1$ con el eje horizontal.

La función $f(x)=x^4-2x^3-1$ es continua es toda la recta real por ser polinómica. Si tomamos, por ejemplo, el intervalo $[-100,0]$ se cumple:

$$f(-100)>0 \quad , \quad f(0)<0 \quad \rightarrow \quad f(-100)\cdot f(0)<0$$

Cumpliéndose así las condiciones del teorema de Bolzano, por lo que podemos afirmar que:

$$\exists c\in(-100,0)/f(c)=0$$

Queda así demostrada la existencia, al menos, de una solución negativa de la ecuación.

Supongamos que existen dos soluciones negativas. Es decir:

Hipótesis $\rightarrow$ $\exists c_1, c_2<0/f(c_1)=f(c_2)=0$

Al ser la función $f(x)=x^4-2x^3-1$ continua y derivable en toda la recta real por ser polinómica, y cumplirse por hipótesis la igualdad de imágenes $f(c_1)=f(c_2)=0$, podemos concluir por el teorema de Rolle:

$$\exists \varphi\in(c_1,c_2)/f'(\varphi)=0$$

Derivamos e igualamos a cero, para obtener el valor que predice el teorema de Rolle.

$$f'(x)=4x^3-6x^2 \quad , \quad f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad 4x^3-6x^2=0 \quad \rightarrow \quad x^2(4x-6)=0 \quad \rightarrow \quad x=0,\frac{3}{2}$$

Amas soluciones no son negativas, por lo que estamos ante un absurdo, ya que el teorema de Rolle predice un valor $\varphi\in(c_1, c_2)$ negativo, ya que los extremos del intervalo son negativos ($c_1, c_2<0$).

Si hay un absurdo, significa que la hipótesis de partida es falsa. No hay dos soluciones negativas. Por lo tanto, la solución demostrada por el teorema de Bolzano es única.

c.q.d.

Hoja 12. Problema 6

6. Calcula a para que $f(x)=\begin{cases} 1-\cos(x) & si \quad x\le 0 \\ x^2+ax & si \quad x>0 \end{cases}$ verifique el teorema de Rolle en el intervalo $[\frac{-\pi}{2},1]$. Para ese resultado de a obtener el valor que predice el teorema en dicho intervalo.

Para poder aplicar el teorema de Rolle, al función debe ser continua en $[\frac{-\pi}{2},1]$, derivable en $(\frac{-\pi}{2},1)$ y verificar $f(\frac{-\pi}{2})=f(1)$.

La función es continua $[\frac{-\pi}{2},1]-\{0\}$ por ser polinómica más coseno (a la izquierda de cero) y por ser polinómica (a la derecha de cero). En el punto frontera $x=0$ debe verificarse:

$$f(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}(1-\cos(x))=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}(x^2-ax)=0$$

Ambos límites laterales coinciden → $límite \quad L=0$

$$f(0)=0=L$$

Por lo tanto, la función es continua en $x=0$, independientemente del valor de a .

Estudiamos la derivabilidad.

$$f'(x)=\begin{cases} sen(x) & si \quad x<0 \\ 2x+a & si \quad x>0 \end{cases}$$

La función es derivable $(\frac{-\pi}{2},1)-\{0\}$ por ser seno (a la izquierda de cero) y por ser polinómica (a la derecha de cero). En el punto frontera $x=0$ debe verificarse:

$f'(0^-)=0$, $f'(0^+)=a$ → si $a=0$ la función es derivable en $x=0$.

Obtenemos el valor de la función en los extremos del intervalo, tomando $a=0$.

$$f\left(\frac{-\pi}{2}\right)=1 \quad , \quad f(1)=1 \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{-\pi}{2}\right)=f(1)$$

Se cumplen todas las condiciones del teorema de Rolle. El valor que predice el teorema es:

$$\exists c \in \left(\frac{-\pi}{2}, 1\right) / f'(c)=0$$

Debemos anular la derivada en ambos tramos de la función.

$$sen(x)=0 \quad \rightarrow \quad x=0$$
$$2x=0 \quad \rightarrow \quad x=0$$

Por lo tanto, el valor que predice Rolle es $x=0$

Hoja 12. Problema 7

7. ¿Se puede aplicar el teorema de Lagrange, o teorema del valor medio del cálculo diferencial, a la función $f(x)=\frac{1}{2-x}$ en el intervalo $[0,1]$? En caso afirmativo, calcular el punto que predice el teorema.

Las condiciones del teorema de Lagrange son:

$f(x)=\frac{1}{2-x}$ continua en $[0,1]$ $\rightarrow$ es cierto, ya que el denominador solo se anula en $x=2$, por lo que la función es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$.

$f'(x)=\frac{1}{(2-x)^2}$ derivable en $(0,1)$ $\rightarrow$ es cierto, ya que el denominador de la función derivada solo se anula en $x=2$, por lo que la función original es derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$.

Con esto podemos aplicar la consecuencia de teorema de Lagrange.

$$\exists c \in (0,1) / f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \rightarrow f'(c)=\frac{1-\frac{1}{2}}{1} \rightarrow f'(c)=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{(2-x)^2} \quad , \quad f'(c)=\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{(2-c)^2}=\frac{1}{2} \rightarrow 2=(2-c)^2$$

$$2=4+c^2-4c \rightarrow c^2-4c+2=0 \rightarrow c=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{2}}{2}=2\pm\sqrt{2}$$

Elegimos el valor que está dentro del intervalo $(0,1)$ $\rightarrow$ $c=2-\sqrt{2}\simeq 0{,}59$