Problemas – Tema 4

Solución a problemas de Repaso y Ampliación 1ª Evaluación - Hoja 11 - Problemas 3, 7

Hoja 11. Problema 3

3. Sea $f(x)=x^2 e^{-x^2}$. Determina las asíntotas y los intervalos de crecimiento. Hallar, si existen, los extremos relativos de la función.

El dominio de la función es toda la recta real, ya que estamos ante un producto y composición de polinomio y exponencial, que son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$. Por lo tanto no hay puntos candidatos a asíntotas verticales, al estar la función definida en todo $\mathbb{R}$.

Asíntotas horiontales

$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty}$ → En el infinito la exponencial es más potente que cualquier polinomio, por lo que la indeterminación tiende a 0 → $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$

De forma análoga $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$

Existe una asíntota horizontal en $y=0$. Y si existe asíntota horizontal, no existen asíntotas oblicuas.

Calculamos la derivada para el estudio del crecimiento.

$$f(x)=\frac{x^2}{e^{x^2}} \rightarrow f'(x)=\frac{2xe^{x^2}-x^2 e^{x^2} 2x}{(e^{x^2})^2}=\frac{2x-x^2 2x}{e^{x^2}}=\frac{2x-2x^3}{e^{x^2}}$$

$f'(x)=0 \rightarrow 2x-2x^3=0 \rightarrow 2x(1-x^2)=0 \rightarrow x=0 \ , \ x=\pm 1$ → puntos críticos

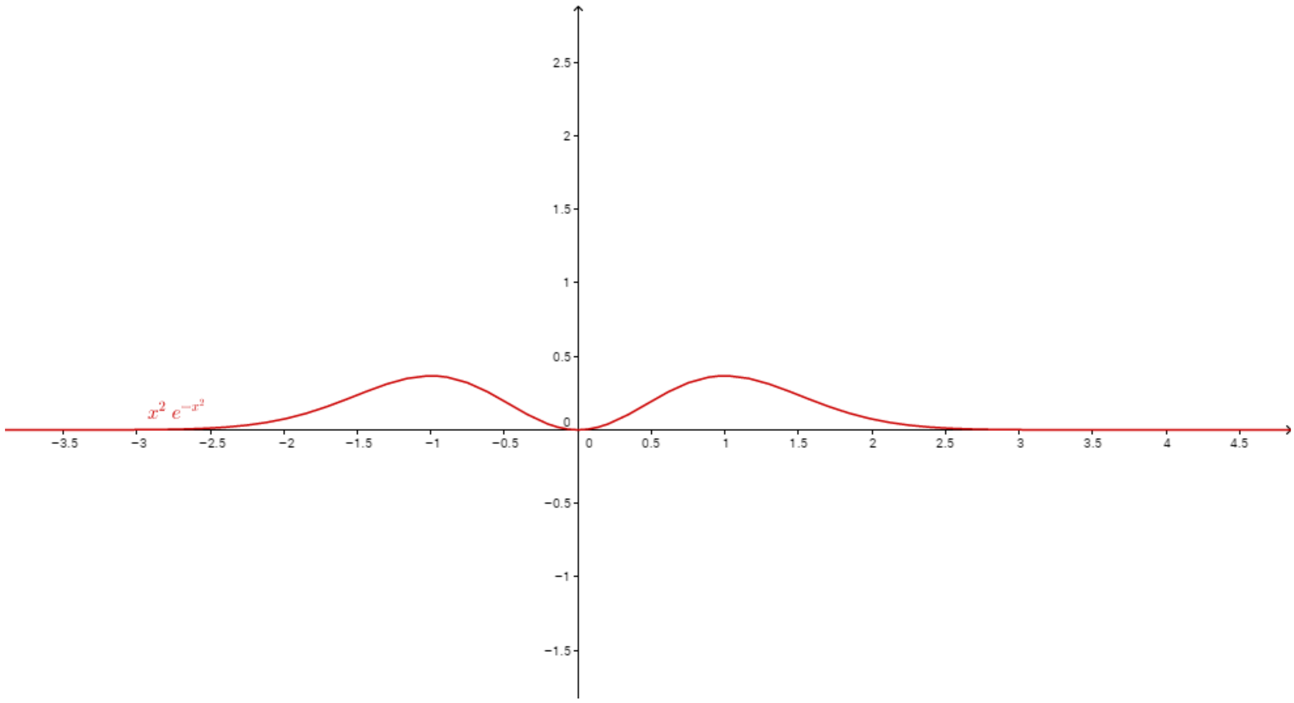
Estudiamos el crecimiento en los siguientes intervalos.

Función $f(x)$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\downarrow$
Intervalos	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(-10)>0$	$f'(\frac{-1}{2})<0$	$f'(\frac{1}{2})>0$	$f'(10)<0$

Si $x=-1 \rightarrow f(-1)=\frac{1}{e} \rightarrow (-1,\frac{1}{e})$ → máximo relativo

Si $x=0 \rightarrow f(0)=0 \rightarrow (0,0)$ → mínimo relativo

Si $x=1 \rightarrow f(1)=\frac{1}{e} \rightarrow (1,\frac{1}{e})$ → máximo relativo



Hoja 11. Problema 7

7. Dada la función $f(x)=\frac{a\,x+b}{c\,x-1}$ **calcula los valores de** a **,** b **y** c **sabiendo que** $x=\frac{1}{2}$ **es una asíntota vertical y que** $y=5x-6$ **es la recta tangente a su gráfica en el punto** $x=1$ **.**

La existencia de una asíntota vertical implica que el denominador debe anularse en $x=\frac{1}{2} \rightarrow c\cdot\frac{1}{2}-1=0 \rightarrow c=2$

Si la recta $y=5x-6$ es tangente a la función en $x=1$, implica que ambas funciones comparten el mismo valor de ordenada para $x=1 \rightarrow y=5\cdot 1-6=-1$ → es decir, la función pasa por el punto $(1,-1) \rightarrow f(1)=\frac{a\cdot 1+b}{2\cdot 1-1}=-1 \rightarrow a+b=-1$

Si la recta $y=5x-6$ es tangente a la función en $x=1$, por la interpretación geométrica de la derivada, se cumple que $f'(1)$ coincide con la pendiente de la recta $m=5$. Es decir → $f'(x)=\frac{a\cdot(2x-1)-(a\,x+b)\cdot 2}{(2x-1)^2} \rightarrow f'(1)=\frac{a\cdot(2-1)-(a+b)\cdot 2}{(2-1)^2}=5$

$$\frac{a-2a-2b}{1}=5 \rightarrow -a-2b=5$$

Podemos formar un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$\begin{cases} a+b=-1 \\ -a-2\text{b}=5 \end{cases}$ → sumamos ambas ecuaciones → $-b=4 \rightarrow b=-4 \rightarrow a=3$

La función resulta $f(x)=\frac{3x-4}{2x-1}$