Problemas – Tema 4

Solución a problemas de Repaso y Ampliación 1ª Evaluación - Hoja 01 - Problemas 8, 9

Hoja 1. Problema 9

Resuelto por José Antonio Álvarez Ocete (diciembre 2014)

8. Estudia y representa:

El dominio de f(x) son todos los números reales excepto el 0, pues se anula el denominador de ambas fracciones. En cuanto a los puntos de corte:

OY → x=0, que no está contenido en el dominio de f(x), ergo f(x) no corta al eje OY

OX → y=0 → $0=\frac{1+x}{x^3}$ → x +1 = 0 → x= -1 → P (-1,0)

Sobre la simetría de f(x) podemos decir que no es ni par ni impar puesto que:

$f(x)\neq f(-x)$ y $-f(x)\neq f(-x)$

Asíntota Vertical:

$\lim_{x\to 0^-}\frac{1+x}{x^3}$ → $-\infty$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{0^+}$ → $+\infty$

Por lo tanto, hay una Asíntota Vertical en x=0

Asíntota Horizontal:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1+x}{x^3}$$

En el infinito, el polinomio de grado 3 tiene más fuerza que el polinomio de grado 1, por lo tanto hay una Asíntota Horizontal en y=0.

Crecimiento:

Derivamos f(x) para poder estudiar su crecimiento:

$$f'(x) = \frac{-3x^2}{x^6} + \frac{-2x}{x^4}$$

Ahora la igualamos a 0 para buscar los puntos críticos (posibles máximos o mínimos):

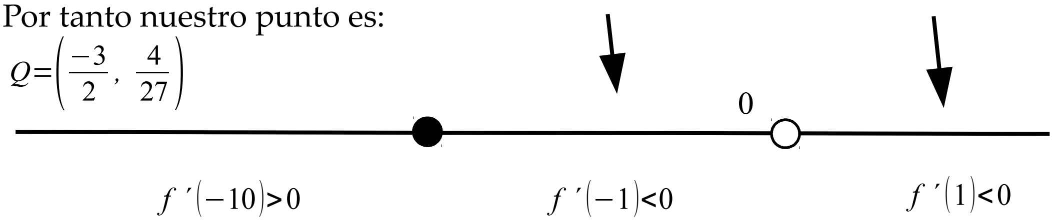
$$\frac{-3x^2}{x^6} + \frac{-2x}{x^4} = 0 \rightarrow \frac{-3x^2 - 2x^3}{x^6} = 0 \rightarrow -3-2x=0 \rightarrow x = \frac{-3}{2}$$

Buscamos la imagen del punto evaluando en f(x):

$$f\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{-3}{2}\right)^3} + \frac{1}{\left(\frac{-3}{2}\right)^2} = \frac{4}{27}$$

Por tanto nuestro punto es:

$$Q = \left(\frac{-3}{2}, \frac{4}{27}\right)$$



Pero, ¿es máximo o mínimo? Colocamos los puntos críticos en la recta real y evaluamos para ver su crecimiento: Q es un máximo

Curvatura:

Para estudiarla hallamos la segunda derivada de f(x):

$$f''(x)=\frac{-6x*x^6+6x^5*3x^2}{x^{12}}+\frac{-2x^4+4x^3*2x}{x^8}$$

Operamos y simplificamos y nos queda:

$$f''(x)=\frac{6*(2+x)}{x^5}$$

Para encontrar los posibles puntos de inflexión igualamos la segunda derivada a 0 y operamos:

$$\frac{6*(2+x)}{x^5}=0\rightarrow\quad 2+x=0\rightarrow\quad x=-2$$

Para hallar la imagen del punto x = -2 lo evaluamos en nuestra f(x) inicial:

$$f(-2)=\frac{1}{(-2)^3}+\frac{1}{(-2)^2}=\frac{1}{8}$$

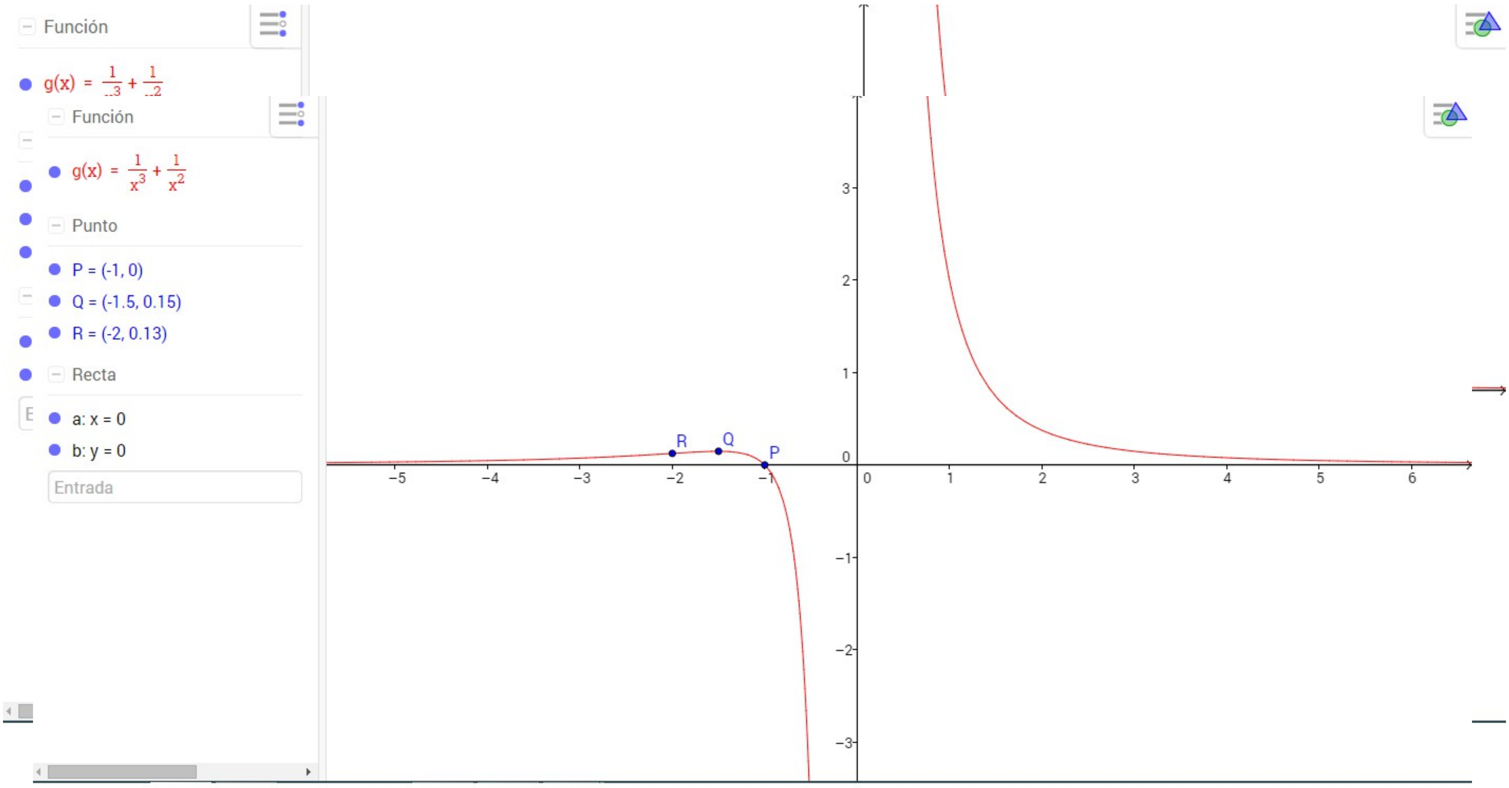
Con lo que el punto R queda como:

$$R=\left(-2,\ \frac{1}{8}\right)$$

Pero, ¿es un punto de inflexión? Colocamos los puntos críticos en la recta real y evaluamos para ver su curvatura, y vemos que R sí que es un punto de inflexión.

Representación:

En último lugar, me sirvo de Geogebra para representar la gráfica:



Hoja 1. Problema 9

Resuelto por Gabriel Manzano (diciembre 2014)

9. Estudia y representa:

$$f(x)=\left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)^2$$

$$f(x)=\left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)^2=\frac{(3x-2)^2}{(7-9x)^2}=\frac{9x^2-12x+4}{49-126x+81x^2}$$

DOMINIO:

La función es continua en toda la recta real excepto donde el denominador se anule, es decir:

$$81x^2-126x+49=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\rightarrow\ x=\frac{126\pm\sqrt{15876-15876}}{162}=\frac{7}{9}$$

PUNTOS DE CORTE:

- Punto de corte con el eje de abscisa. Implica que **y=0**

$$\frac{(3x-2)^2}{(7-9x)^2}=0\rightarrow(3x-2)^2=0\rightarrow 9x^2-12x+4=0$$

Volvemos aplicar la ecuación de segundo grado

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\rightarrow\ x=\frac{12\pm\sqrt{144-144}}{18}=\frac{2}{3}$$

($\frac{2}{3}$, 0) es punto de corte con EL eje OX

- Punto de corte con el eje de ordenada. Implica que **x=0**

$$y=\frac{9\cdot 0^2-12\cdot 0+4}{49-126\cdot 0+81\cdot 0^2}=\frac{4}{49}$$

(0, $\frac{4}{49}$) es un punto de corte con el eje OY

ASÍNTOTAS:

- Asíntota vertical:

$$\lim_{x\rightarrow\frac{7}{9}} f(x)=\lim_{x\rightarrow-\infty}\frac{9x^2-12x+4}{81x^2-126x+49}=\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{7}{9}} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2-12x+4}{81x^2-126x+49}=\infty$$

Existe una **asíntota vertical en** $\frac{7}{9}$

- Asíntota horizontal

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2-12x+4}{81x^2-126x+49}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{1}{9}$$

Al ser una indeterminación infinito entre infinito, realizamos el cociente entre de los términos de mayor grado

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2-12x+4}{81x^2-126x+49}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{1}{9}$$

Al ser una indeterminación infinito entre infinito, realizamos el cociente entre de los términos de mayor grado.
Como coinciden los limites, concluimos que existe una **asíntota horizontal en y=** $\frac{1}{9}$

- Asíntota inclinada

Cuando existe al menos una asíntota horizontal, **no existe asíntota oblicua**

CRECIMIENTO, DECRECIMIENTO Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

En primer lugar calculamos la derivada de $f(x)=\left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)^2$:

$$f'(x)=2\cdot\left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)\cdot\left(\frac{(3\cdot(7-9x))-[(3x-2)\cdot(-9)]}{(7-9x)^2}\right)$$

$$f'(x)=2\cdot\left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)\cdot\left(\frac{21-27x+27x-18}{(7-9x)^2}\right)$$

$$f'(x)=2\cdot\left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)\cdot\left(\frac{3}{(7-9x)^2}\right)$$

$$f'(x)=\frac{6\cdot(3x-2)}{(7-9x)^3}$$

Igualamos la derivada a cero:

$$f'(x)=0\rightarrow\frac{6\cdot(3x-2)}{(7-9x)^3}=0\rightarrow 6\cdot(3x-2)=0$$

Despejamos x:

$$6\cdot(3x-2)=0\rightarrow 18x-12=0\rightarrow \quad x=\frac{2}{3}$$

Ahora evaluamos en la función derivada a la izquierda y a la derecha de $\frac{2}{3}$ y $\frac{7}{9}$

$$\begin{array}{ccccc} - & 2/3 & + & 7/9 & - \end{array}$$

Por tanto:

- La función es **decreciente** desde **(-** ∞ **,** $\frac{2}{3}$**)**
- **Creciente** desde **(**$\frac{2}{3}$**,** $\frac{7}{9}$**)**
- **Decreciente** desde **(**$\frac{7}{9}$**, +** ∞ **)**

Para calcular máximos y mínimos sustituimos el valor $\frac{2}{3}$ en la función original:

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)-2}{7-9\cdot\left(\frac{2}{3}\right)}\right)^2=0$$

Conclusión:

- Hay un **mínimo** en **(**$\frac{2}{3}$**,** 0**)**

CONCAVIDAD, CONVEXIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Realizamos la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{18\cdot(7-9x)^3-(18x-12)\cdot 3\cdot(7-9x)^2\cdot(-9)}{(7-9x)^6}$$

$$f''(x)=\frac{(7-9x)^2\cdot[18\cdot(7-9x)-(18x-12)\cdot 3\cdot(-9)]}{(7-9x)^6}$$

$$f''(x)=\frac{126-162x-(18x-12)\cdot(-27)}{(7-9x)^4}$$

$$f''(x)=\frac{126-162x+486x-324}{(7-9x)^4}=\frac{324x-198}{(7-9x)^4}=\frac{18(18x-11)}{(7-9x)^4}$$

Igualamos la segunda derivada a cero:

$$f''(x)=0\rightarrow\frac{18(18x-11)}{(7-9x)^4}=0\rightarrow 18(18x-11)=0\rightarrow x=\frac{11}{18}$$

Evaluamos en la segunda derivada a la izquierda y a la derecha de $\frac{11}{18}$

(candidato a punto de inflexión):

- → Cóncavo 11/18 + Convexo

Evaluamos el valor x_0 del punto de inflexión en la función original:

$$f\left(\frac{11}{18}\right)=\left(\frac{3\cdot\left(\frac{11}{18}\right)-2}{7-9\cdot\left(\frac{11}{18}\right)}\right)^2=\left(\frac{\frac{-3}{18}}{\frac{27}{18}}\right)^2=\left(\frac{-3}{18}:\frac{27}{18}\right)^2=\left(\frac{54}{486}\right)^2=\left(\frac{3}{27}\right)^2=\frac{1}{81}$$

Por tanto, un punto de inflexión en P $\left(\frac{11}{18}, \frac{1}{81}\right)$

Representación gráfica: