

**Instrucciones:**

**a) Duración:** 1 hora y 10 minutos.

**b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. Indica, en la primera hoja donde resuelves el examen, la opción elegida.

**c)** La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

**d)** Contesta de forma razonada y escribe a bolígrafo (no a lápiz) ordenadamente y con letra clara. Las faltas de ortografía y la mala presentación pueden restar hasta un máximo de 2 puntos de la nota final (-0,25 por falta, borrón o tachón).

**e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

<b>Opción A</b>
-----------------

---

**Ejercicio 1.- a) [1,5 puntos]** Estudia la derivabilidad de  $f(x) = \sqrt[3]{x \cdot \operatorname{sen}(x)}$  en  $x=0$ .

**b) [1 punto]** Calcula  $a$  y  $b$  para que  $f(x) = \begin{cases} \ln(e + \operatorname{sen}(x)) & \text{si } x < 0 \\ x^3 + ax + b & \text{si } \geq 0 \end{cases}$  sea derivable en  $x=0$ .

---

**Ejercicio 2.- a) [1 punto]** Demostrar que  $e^x + 2x - 1 = 0$  tiene una y solo una raíz real.

**b) [1,5 puntos]** Usar el Teorema de Lagrange para demostrar que  $e^x \geq x + 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

---

**Ejercicio 3.- a) [1 punto]** Sea  $f(x)$  una función derivable tal que la ecuación  $f'(x) = 0$  carece de soluciones reales. Demostrar que  $f(x)$  es inyectiva.

**b) [1,5 puntos]** Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f(x) = \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$

---

**Ejercicio 4.- a) [1,5 puntos]** Calcula  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{x-1} \right)^{\ln x}$

**b) [1 punto]** Calcula  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x - x \cdot \cos x}{x - \operatorname{sen} x} \right)$

---

**Opción B**

**Ejercicio 1.- a) [1 punto]** Calcula  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{2x} \cdot x^2}{(1 - e^x)^2} \right)$

**b) [1,5 puntos]** Demostrar que si  $f(x)$  y  $g(x)$  son continuas en  $[a, b]$  y derivables en  $(a, b)$  tal que  $f(a) = g(a)$  y  $f(b) = g(b)$ , entonces existe al menos un valor  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = g'(c)$ .

**Ejercicio 2.- [2,5 puntos]** Estudia y representa  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-5}$

**Ejercicio 3.- [2,5 puntos]** Una hoja de papel debe tener  $18 \text{ cm}^2$  de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtener razonadamente, por optimización, las dimensiones que minimizan la superficie del papel.

**Ejercicio 4.- a) [1 punto]** Obtener con precisión de una cifra decimal la única solución real que posee la función  $f(x) = \ln(x+1) + x + 1$

**b) [1,5 puntos]** Obtener el valor  $x$  del punto de la función  $f(x) = \sqrt{1+x^3}$  a menor distancia del punto  $(2,0)$ .