

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 10 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. Indica, en la primera hoja donde resuelves el examen, la opción elegida.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe a bolígrafo (no a lápiz) ordenadamente y con letra clara. Las faltas de ortografía y la mala presentación pueden restar hasta un máximo de 2 puntos de la nota final (-0,25 por falta, borrón o tachón).

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1.- a) [1,5 puntos] Comprueba que $f(x) = x^3 - x + a$ cumple las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$ independientemente del valor de a . Obtener el valor x que predice el teorema.

b) [1 punto] Para $a=1$ obtener el punto $(x, f(x))$ donde la recta tangente a $f(x)$ sea paralela a la recta que une los puntos $(0, f(0))$ y $(2, f(2))$ en el intervalo $[0,2]$ (no usar decimales; operar con fracciones y raíces).

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Estudia y representa $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Ejercicio 3.- a) [0,5 puntos] Enuncia la Regla de L'Hôpital o bien enuncia los tres teoremas siguientes: postulado de Cantor + teorema de acotación + teorema de Bolzano-Weierstrass.

b) [1 punto] Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$

c) [1 punto] Calcula $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$

Ejercicio 4.- Un barco está anclado a 8 km del punto más próximo de la costa. Es necesario enviar un mensajero a una ciudad que está situada a 16 km del punto de tierra más próximo al barco, a lo largo de la costa. Si el mensajero va a pie, camina a una velocidad de 6 km/h. Y si va remando, avanza a 5 km/h.

a) [2 puntos] ¿A qué distancia de la ciudad debe desembarcar para llegar al campamento en el menor tiempo posible?

b) [0,5 puntos] ¿Cuánto será ese tiempo mínimo?

Opción B

Ejercicio 1.-

a) [1,5 puntos] ¿En qué valor del intervalo $[0,2]$ las funciones $f(x)=x^3$ y $g(x)=-x^2+1$ cumplen las condiciones del Teorema de Cauchy? Obtener el valor de x que predice el teorema.

b) [1 punto] Obtener el único punto de inflexión que posee $f(x)=\left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)^2$ (obtener las coordenadas $(x, f(x))$ del punto de inflexión sin usar decimales; operar con fracciones).

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Estudia y representa $f(x)=\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)$ en el intervalo $[0,\pi]$.

Ejercicio 3.-

a) [1 punto] Enuncia y demuestra el Teorema de Bolzano o el Teorema de Rolle (solo uno de los dos).

b) [1 punto] Demuestra que, sea cual sea el número real k , la ecuación $x^5-5x+k=0$ no puede tener dos soluciones positivas menores que 1.

c) [0,5 puntos] Calcula $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$, con $a > 0$

Ejercicio 4.- Dada la función $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{x}{|x+2|}} & \text{si } x \leq 0 \text{ y } x \neq -2 \\ x^3+ax+b & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) [1 punto] Obtener a y b para que $f(x)$ sea derivable en $x=0$.

b) [1 punto] Con los valores obtenidos de a y b , estudia la continuidad y la derivabilidad en todo su dominio.

c) [0,5 puntos] ¿Podemos aplicar el Teorema de Lagrange en el intervalo $[-3,-1]$? En caso afirmativo, obtener el valor x que satisface el teorema. Justifica de manera razonada tu respuesta.