

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 10 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. Indica, en la primera hoja donde resuelves el examen, la opción elegida.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe a bolígrafo (no a lápiz) ordenadamente y con letra clara. Las faltas de ortografía y la mala presentación pueden restar hasta un máximo de 2 puntos de la nota final (-0,25 por falta, borrón o tachón).

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Sea la circunferencia centrada en el origen y radio 4 unidades, de ecuación $x^2 + y^2 = 16$. Sea el rectángulo de lados paralelos a los ejes cartesianos y vértices sobre la circunferencia. Con estas condiciones, obtener las dimensiones del rectángulo de área máxima mediante un problema de optimización. Calcular dicha área máxima.

Ejercicio 2.- Sea $f(x) = \begin{cases} a + \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

a) [0,5 puntos] Calcula a para que la función sea continua en toda la recta real.

b) [1 punto] Estudiar la derivabilidad de la función si $a = 0$.

c) [1 punto] Obtener ecuación de la recta normal a la gráfica en $x = 1$.

Ejercicio 3.- a) [1,5 puntos] Utiliza el teorema de Bolzano y el teorema de Rolle para probar que $x^4 - 2x^3 - 1 = 0$ tiene una única solución negativa.

b) [1 punto] Dada la función $f(x) = \frac{ax+b}{cx-1}$ calcula los valores de a , b y c sabiendo que $x = \frac{1}{2}$ es una asíntota vertical y que $y = 5x - 6$ es la recta tangente a su gráfica en el punto $x = 1$.

Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\left(\frac{1}{\sin(x)}\right)^2}$.

Opción B

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] La fabricación de x tabletas gráficas supone un coste total en euros dado por la función $C(x) = 1500x + 1\,000\,000$. Cada tableta se venderá a un precio unitario dado por la función $P(x) = 4000 - x$. Suponiendo que todas las tabletas fabricadas se venden, ¿cuál es el número que hay que producir para obtener el beneficio máximo? Obtener ese beneficio máximo.

Ejercicio 2.- a) [1 punto] Calcula a para que el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^x - x}{x^2}$ sea finito. Obtener el valor de dicho límite.

b) [1 punto] Obtener m para que la función $f(x) = \begin{cases} m(x+1)e^{2x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{(x+1)\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea continua en $x=0$.

c) [0,5 puntos] Enuncia la regla de L'Hôpital.

Ejercicio 3.- a) [1 puntos] ¿Se puede aplicar el teorema de Lagrange, o teorema del valor medio del cálculo diferencial, a la función $f(x) = \frac{1}{2-x}$ en el intervalo $[0,1]$? En caso afirmativo, calcular el punto que predice el teorema.

b) [1,5 puntos] Sea $f(x) = x^2 e^{-x^2}$. Determina las asíntotas y los intervalos de crecimiento. Hallar, si existen, los extremos relativos de la función.

Ejercicio 4.- [2,5 punto] Obtener la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)^2$ en su punto de inflexión.