Teoría – Tema 3

Relación entre las gráficas de una función y de sus derivadas. Optimizar la pendiente de la recta tangente a la función

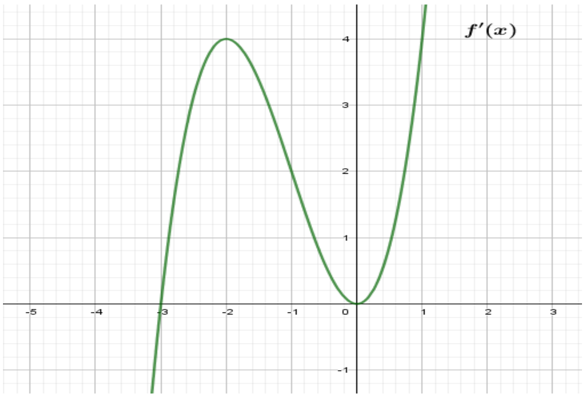
Índice de contenido

Puntos críticos y extremos relativos de f(x): ¿Cómo se ven en la gráfica de f ' (x)?

Aunque estos conceptos también los hemos trabajado en 1ºBach, vamos a repasarlo para afianzar ideas. La experiencia dice que a los alumnos de Bachillerato les cuesta extraer información matemática viendo simplemente las gráficas.

Los puntos críticos de la función original $f(x)$ implican → $f'(x)=0$.

Por lo tanto, donde la gráfica de la función derivada corte al eje horizontal seguro que tendremos un punto crítico.



La gráfica verde muestra la curva de la función derivada $f'(x)$, que corta al eje horizontal en las abscisas $x=-3$ y $x=0$.

Ambos valores son puntos críticos.

¿Son extremos relativos de la función original $f(x)$?

Puede que sí, puede que no. Los puntos críticos son candidatos a extremos relativos. Por lo que debemos razonar si lo son o no.

En $x=-3$ la gráfica de la derivada corta el eje horizontal y lo atraviesa, pasando de valores negativos a vaores positivos. **Siempre, siempre, siempre, que la gráfica de la función derivada atraviese el eje horizontal tendremos un extremo relativo**.

En nuestro ejemplo, la derivada a la izquierda de $x=-3$ es negativa y la derivada a la derecha de $x=-3$ es positiva. La derivada mide el crecimiento de la función original $f(x)$, por lo que derivada negativa implica $f(x)$ estrictamente decreciente mientras que derivada positiva genera $f(x)$ estrictamente creciente. Es decir, en $x=-3$ la funcion $f(x)$ pasa de decreciente a creciente. En $x=-3$ hay un mínimo relativo de la función original $f(x)$.

En $x=0$ la gráfica de la derivada corta pero no cruza al eje horizontal. Es decir, a la izquierda de $x=0$ la derivada es positiva y a la derecha de $x=0$ la derivada sigue siendo positiva. Es un punto crítico que no es extremo relativo. ¿Qué será....? Un punto de inflexión.

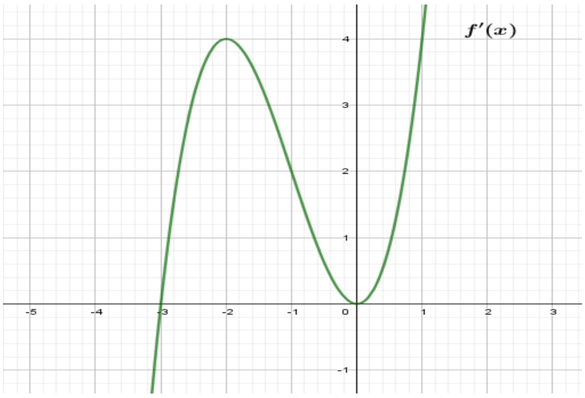
Siempre, siempre, siempre que tengamos un punto crítico que no sea extremo relativo, será punto de inflexión.

Puntos de inflexión de f(x): ¿Cómo se ven en la gráfica de la derivada f ' (x)?

Los puntos candidatos a ser puntos de inflexión de la función original $f(x)$ implican → $f''(x)=0$.

Si tuviéramos la gráfica de la función segunda derivada, sería muy fácil identificar los candidatos a puntos de inflexión: Simplemente viendo donde la segunda derivada corta al eje horizontal.

Pero por norma general, en los ejercicios de Bachillerato y Selectividad, no suelen dar la gráfica de la segunda derivada sino a gráfica de la primera derivada. ¿Cómo sacar los candidatos a puntos de inflexión mirando solo la gráfica de la primera derivada?



Razonando así: la segunda derivada es la derivada de la primera derivada.

$$f''=\frac{d[f']}{dx} \rightarrow f''(x)=0 \rightarrow \frac{d[f']}{dx}=0$$

La interpretación geométrica de la derivada afirma que la derivada se hace cero donde la recta tangente a la función es una recta horizontal (pendiente cero).

Por lo que debemos mirar en la gráfica de la función derivada $f'(x)$ qué puntos generarían una recta tangente completamente horizontal.

Estos puntos candidatos a puntos de inflexión de $f(x)$ serían los extremos relativos de la propia función derivada $f'(x)$ (en nuestro ejemplo tenemos un máximo relativo de $f'(x)$ en $x=-2$ y un mínimo relativo en $x=0$) y también habría que mirar si hay algún punto de inflexión de $f'(x)$ que generase una recta tanente horizontal (en nuestro ejemplo no lo hay).

Y la conclusión a la que llegaríamos sería la siguiente: **Siempre, siempre, siempre que tengamos un extremo relativo en la gráfica de $f'(x)$ tendremos un punto de inflexión en la gráfica de $f(x)$.**

O dicho de otra manera más precisa: los extremos relativos de $f'(x)$ son los puntos de inflexión de $f(x)$.

En nuestro ejemplo tendremos puntos de inflexión de $f(x)$ en as abscisas $x=-2$ y $x=0$.

Optimizar la pendiente de la recta tangente a la función f(x)

Son muy típicos los enunciados de problemas donde se pide “obtener el punto donde la pendiente de la recta tangente a la función se hace máxima... se hace mínima”.

Cuando veamos esta frase, vamos a tomar como norma **sustituir la expresión “pendiente de la recta tangente a la función” por la palabra “derivada”** (haciendo uso de la interpretación geométrica de la derivada).

De esta forma, el ejercicio quedaría: “obtener el punto donde la derivada se hace máxima... se hace mínima”. Es decir, tenemos que maximizar o minimizar la función derivada. Un problema de optimización trabajando con la ecuación de la función derivada.

Ejemplo

Sea la función $f(x)=\frac{x}{e^x}$ **definida en toda la recta real. Determina el punto de la gráfica en el que la pendiente de la recta tangente es mínima (ayuda: recuerda la relación que hay entre pendiente y derivada a través de la interpretación geométrica de la derivada).**

La pendiente de la recta tangente coincide con el valor de la derivada. Por lo tanto, si me preguntan cuando la pendiente es mínima es lo mismo que calcular cuándo la función derivada es mínima.

¿Y qué significa minimizar una función? Derivarla e igualarla a cero, ¿verdad?

¿Y si debo minimizar la función derivada? Pues derivo la función derivada e igualo a cero. Es decir, hacemos la segunda derivada igual a cero. Moraleja: minimizar o maximizar la pendiente de la recta tangente, es aplicar la condición necesaria de punto de inflexión.

$f(x)=\frac{x}{e^x} \rightarrow f'(x)=\frac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\frac{1-x}{e^x}$ → Para evitar liarnos con tantas primas ' de la derivada, vamos a llamar a la primera derivada $f'(x)=g(x)=\frac{1-x}{e^x}$ → Y ahora simplemente obtenemos el mínimo relativo de $g(x)$. Un problema que hemos resuelto miles de veces.

$g'(x)=0 \rightarrow g'(x)=\frac{-e^x-(1-x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{-1-(1-x)}{e^x}=\frac{-2+x}{e^x} \rightarrow -2+x=0 \rightarrow x=2 \rightarrow$ punto crítico de la función $g(x)$.

Aplicamos la condición suficiente de la segunda derivada para ver si es un mínimo relativo.

$g''(x)=\frac{e^x-(-2+x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{1-(-2+x)}{e^x}=\frac{3-x}{e^x} \rightarrow g''(2)=\frac{3-2}{e^2}>0 \rightarrow x=2$ es un mínimo relativo.

Obtenemos su imagen en la función de partida → $f(2)=\frac{2}{e^2} \rightarrow (2,\frac{2}{e^2})$ minimiza la pendiente de la recta tangente a la función.