Teoría – Tema 3

Derivabilidad de una función definida a trozos

Índice de contenido

Esto ya lo hemos estudiado en 1ºBachillerato

El curso pasado ya estudiamos la derivabilidad en funciones a trozos. Repaso ahora en 2ºBach algunos detalles concretos que suelen acarrear errores en los ejercicios.

1. Derivabilidad implica continuidad y ser derivable (o como me gusta más, función suave). Por lo tanto, siempre que nos pidan demostrar si una función es derivable, primero debemos comprobar que sea continua.

Ejemplo 1

Obtener a **y** b **para que** $f(x)=\left\{\begin{matrix} a\cdot\cos(x)+2x & si & x\leq 0 \\ a^2\cdot\ln(x+1)+\frac{b}{x+1} & si & x>0 \end{matrix}\right\}$ **sea derivable en** $x=0$ **.**

En estos problemas de determinar dos parámetros en una función definida en dos trozos, **suele aparecer una condición al estudiar la continuidad y otra condición a estudiar la derivabilidad**. Con esas condiciones, podremos formar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que resolveremos.

Primero estudiamos la continuidad en $x=0$.

$$f(0)=a\cdot\cos(0)+2\cdot 0=a$$

$$L^-=\lim_{x\to 0^-}(a\cdot\cos(x)+2x)=a \quad , \quad L^+=\lim_{x\to 0^+}(a^2\cdot\ln(x+1)+\frac{b}{x+1})=b \rightarrow L^-=L^+ \rightarrow a=b$$

$f(0)=L \rightarrow a=b \rightarrow f(x)$ es continua en $x=0$ siempre que se cumpla $a=b$

Derivamos la función a trozos. Recuerda quitar el signo igual en el punto frontera, ya que eso es precisamente lo que queremos demostrar ahora: saber si es derivable en el punto frontera $x=0$.

$$f'(x)=\left\{\begin{matrix} -a\cdot sen(x)+2 & si & x<0 \\ \frac{a^2}{x+1}-\frac{b}{(x+1)^2} & si & x>0 \end{matrix}\right\}$$

La función será derivable en $x=0$ si coinciden las derivadas laterales.

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}(-a\cdot sen(x)+2)=2 \quad , \quad f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}(\frac{a^2}{x+1}-\frac{b}{(x+1)^2})=a^2-b \rightarrow 2=a^2-b$$

$f(x)$ es derivable en $x=0$ si se cumple la condición $2=a^2-b$

Llegamos al siguiente sistema.

$\left\{\begin{matrix} a=b \\ a^2-b=2 \end{matrix}\right\}$ → Sustituimos la primera ecuación en la segunda → $a^2-a-2=0$

Resolvemos → $a=-1$, $a=2$ → Las soluciones que garantizan la derivabilidad en $x=0$ son: $a=-1$, $b=-1$ y $a=2$, $b=2$

2. Si solo nos piden demostrar que la función es derivable en un punto frontera, solo estudiamos las condiciones del punto frontera. Fíjate como en el ejemplo 1 anterior no hemos estudiado nada en los intervalos a la izquierda y a la derecha de 0.

Solo si nos piden explícitamente estudiar la derivabilidad en todo el dominio de la función, tendremos que estudiar primero lo que ocurre en intervalos abiertos y luego lo que ocurre en el punto frontera. Recuerda que estudiar la derivabilidad de una función en un intervalo abierto implica estudiar la continuidad de la función derivada en ese intervalo.

Un truquillo: si el enunciado dice “Sabemos que la función es derivable...” no tendremos que estudiar la derivabilidad en los intervalos abiertos, porque el enunciado ya nos dice que lo es (y ahorramos tiempo en el examen).

Ejemplo 2

Estudia la derivabilidad de la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\left\{\begin{matrix} 3-5x^2 & si & x\leq 1 \\ \dfrac{2}{5x} & si & x>1 \end{matrix}\right\}$ en todo su dominio.

Primero estudiamos la continuidad y la derivabilidad en los intervalos abiertos.

Continuidad intervalos abiertos

$(-\infty,1)$ → $f(x)=3-5x^2$ continua por ser polinómica (los polinomios son continuos en toda la recta real)

$(1,+\infty)$ → $f(x)=\dfrac{2}{5x}$ cociente de polinomios donde el denominador se anula en $x=0$ → Por lo tanto la función es continua en $(1,+\infty)$ porque el valor $x=0$ no pertenece al intervalo $(1,+\infty)$.

Derivabilidad intervalos abiertos

$(-\infty,1)$ → $f'(x)=3-10x$ la función derivada es continua por ser polinómica (los polinomios son continuos en toda la recta real) → Si la función derivada es continua en $(-\infty,1)$ la función original $f(x)$ es derivable en $(-\infty,1)$.

$(1,+\infty)$ → $f(x)=\dfrac{-1}{5x^2}$ cociente de polinomios donde el denominador se anula en $x=0$ → Por lo tanto la función derivada es continua en $(1,+\infty)$ porque el valor $x=0$ no pertenece al intervalo

$(1,+\infty)$ → Si la función derivada es continua en $(1,+\infty)$ la función original $f(x)$ es derivable en $(1,+\infty)$.

En segundo lugar, estudiamos continuidad y derivabilidad en punto frontera.
Una función es derivable en un punto si se cumplen las siguientes dos condiciones:

- Continuidad de la función en el punto.

- Igualdad de las derivadas laterales en el punto.

Para que una función sea continua en un punto, a su vez, se cumplen tres condiciones:

1. $\exists f(1)=3-5=-2$

2. $L^-=\lim_{x\to 1^-}(3-5x^2)=3-5=-2$

$L^+=\lim_{x\to 1^+}\frac{2}{5x}=\frac{2}{5}$

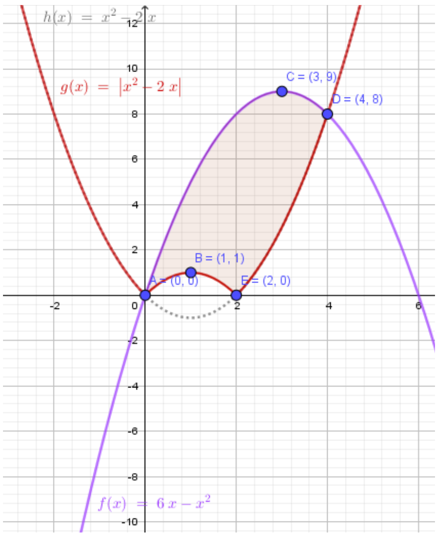
Los límites laterales no son iguales → $L^-\neq L^+$ porque $-2\neq\frac{2}{5}$ → No existe el límite de la función en $x=0$ → Por lo tanto la función no es continua en $x=0$ y, en consecuencia, tampoco será derivable.

Fíjate que ya no tenemos que seguir estudiando la derivabilidad en el punto frontera, porque si no es continua en $x=0$ seguro que no será derivable en $x=0$.

3. Las funcionas cuya gráfica presente un pico (no sea suave) podremos decir que no son derivables en todo su dominio. Esto es muy típico en funciones con valores absolutos.

Ejemplo 3

Decide, sin realizar operaciones, si las funciones morada y roja que aparecen en la gráfica son continuas y derivables o no en todo su dominio.



La función $f(x)=6x-x^2$ de gráfica morada es continua en su dominio porque puedo trazar su gráfica sin levantar la mano del papel. Y es derivable en todo su dominio porque el trazo es suave (sin picos) en todos los puntos de su gráfica.

Por su parte, la función $g(x)=|x^2-2x|$ de gráfica roja es es continua en su dominio porque puedo trazar su gráfica sin levantar la mano del papel. Sin embargo, en los puntos (0,0) y (2,0) aparecen puntos angulosos (las derivadas laterales no coincidirían en $x=0$ ni en $x=2$. Por lo tanto, la función no es derivable en todo su dominio.

Ojo. La función $g(x)=|x^2-2x|$ si sería derivable en el intervalo abierto $(-\infty,0)$, o en el intervalo abierto $(0,2)$, o en el intervalo $(2,\infty)$. Pero no es derivable si consideramos todos los puntos del dominio.