Teoría – Tema 3

Teoremas de derivabilidad

Índice de contenido

Teorema de Rolle

Si una gráfica toma valores iguales en los extremos del intervalo $[a,b]$, y la función es continua en ese intervalo y derivable en (a,b) , es intuitivo pensar que existirá al menos un punto $c\in(a,b)$ donde la curva alcance, de manera suave, un máximo o mínimo relativo. Y en ese punto podremos aplicar la condición necesaria de extremos relativos: $f'(c)=0$.

Teorema de Rolle

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y verifica que $f(a)=f(b)$ ==> $\exists c\in(a,b)/f'(c)=0$

Demostración: Por el teorema de continuidad de Bolzano-Weirstrass sabemos que toda función continua en $[a,b]$ alcanza dentro del intervalo su máximo absoluto $Máx$ y su mínimo absoluto $Mín$ en dicho intervalo.

Si $Máx=Mín$ ==> $Mín=f(x)=Máx,\ \forall c\in[a,b]$ ya que $f(a)=f(b)$. Es decir, la función $f(x)$ es constante ==> Su derivada será igual a 0 en todos los puntos del intevalo ==> Por lo tanto existe al menos un punto del intervalo donde $f'(c)=0$.

Si $Máx\neq Mín$, al menos uno de los extremos será distinto del valor $f(a)=f(b)$. Supongamos $Máx\neq f(a)=f(b)$. Por el teorema de Bolzano-Weirstrass sabemos que la función alcanza su máximo absoluto dentro del intervalo abierto, ya que el máximo no coincide con el valor de la función en los extremos ==> $\exists c\in(a,b)/f(c)=Máx$ ==> Y todo máximo absoluto es, a su vez, máximo relativo ==> $f'(c)=0$.

Si suponemos $Mín\neq f(a)=f(b)$ el razonamiento es análogo, por lo que $\exists c\in(a,b)/f(c)=Mín$ ==> $f'(c)=0$. Quedando así demostrado el teorema.

Ejemplo

$f(x)=x^2+x+1$ ==> Continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

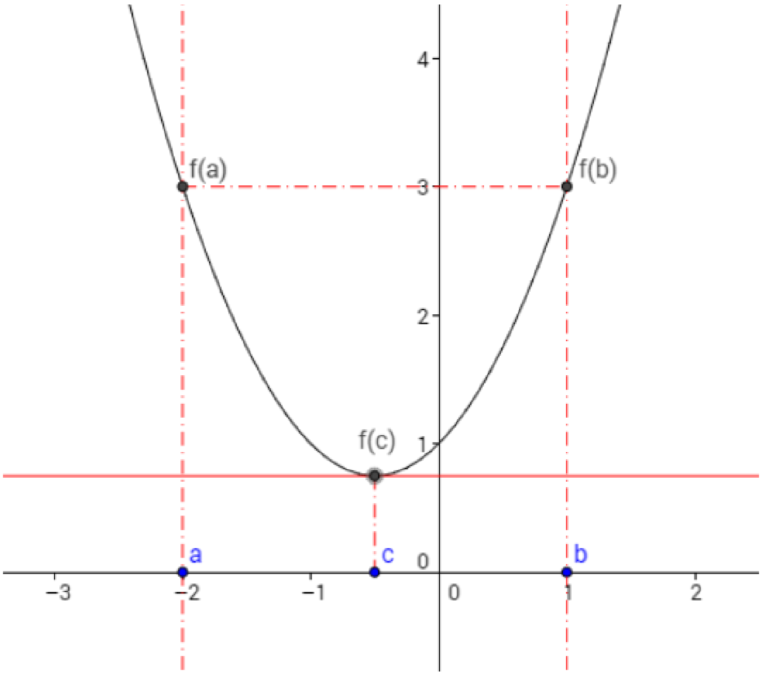
$f(-2)=3$, $f(1)=3$

Se cumplen las condiciones del Teorema de Rolle para el intervalo $[-2,1]$, por lo que podemos afirmar que $\exists c\in(-2,1)/f'(c)=0$.

En efecto: $f'(x)=2x+1 \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow 2x+1=0 \rightarrow x=\frac{-1}{2} \rightarrow \frac{-1}{2}\in(-2,1)$

La interpretación geométrica del teorema se entiende fácilmente. Entre los extremos a y b con $f(a)=f(b)$, se alcanza al menos un extremo relativo. Es decir, un punto con pendiente parelela al eje horizontal OX (**pendiente 0 = derivada nula**).

-------- $f(x)$ *arbitraria, con extremo relativo comprendido en el intervalo* (a,b)



Si utilizamos el **Teorema de Rolle de manera conjunta con el Teorema de Bolzano**, podremos **determinar el número de raíces de una función**, ya que si la función es continua y derivable la unión de ambos teoremas afirma que entre dos soluciones consecutivas $f(a)=f(b)=0$ existe al menos un extremo relativo $c\in(a,b)/f'(c)=0$.

Ejemplo

Comprobar que $f(x)=x^3+6x+4$ tiene una única solución real en todo su dominio de definición.

La función es continua y derivable en todo ℝ por ser polinómica. En el intervalo $[-1,0]$, donde cumple $f(-1)\cdot f(0)<0$, podemos aplicar el Teorema de Bolzano: $\exists c\in(a,b)/f(c)=0$.

Veamos que esta solución es única, por **reducción al absurdo**.

Supongamos que existe una segunda solución real $f(d)=0$ ==> $f(c)=f(d)=0$ ==> Por el Teorema de Rolle podríamos afirmar que $\exists\varphi\in(c,d)/f'(\varphi)=0$.

Si derivamos la función → $f'(x)=3x^2+6$ → $f'(x)=0$ → $x=\sqrt{-2}$ ==> Valor no real ==> Llegamos a un absurdo ==> **Hipótesis de partida falsa** ==> **Existe una única solución real**.

Teorema del valor medio de Lagrange (o de los incrementos finitos)

El Teorema de Rolle es un caso particular del Teorema de Lagrange, para la condición $f(a)=f(b)$.

Si se cumple la igualdad $f(a)=f(b)$, la recta que une $(a,f(a))$ con $(b,f(b))$ es una recta horizontal (pendiente 0). Y el valor $c\in(a.b)$ que satisface el Teorema de Rolle cumple $f'(c)=0$. Es decir, la pendiente de la recta tangente a la función en $c\in(a.b)$ es parelela a la recta horizontal que une $(a,f(a))$ con $(b,f(b))$.

Para el caso general $f(a)\neq f(b)$ se sigue cumpliendo la **igualdad de las pendientes**, con rectas que ya no serán parelelas al eje horizontal OX.

Teorema del valor medio de Lagrange

Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) ==> $\exists c\in(a,b)/f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Demostración: Partimos de la función auxiliar $g(x)=f(x)\cdot(b-a)-x\cdot[f(b)-f(a)]$. Esta función cumple las condiciones del Teorema de Rolle en el intervalo $[a,b]$. Es decir:

- $g(x)$ es continua en $[a,b]$ por ser diferencia de funciones continuas en ese intervalo.
- $g(x)$ es continua en (a,b) por ser diferencia de funciones derivables en ese intervalo.
- $g(a)=g(b)=0$

Por lo tanto, sabemos que $\exists c\in(a,b)/g'(c)=0$ $\rightarrow$ $g'(c)=f'(c)\cdot(b-a)-[f(b)-f(a)]=0$. Y podemos expresar la siguiente igualdad:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Tal y como queríamos demostrar. Si recordamos de la definición de derivada, la expresión que hemos obtenido para $f'(c)$ es el **incremento medio** (o tasa de variación media TVM) de la función en el intevalo $[a,b]$.

Si vemos $b=a+h$ $\rightarrow$ $f(b)=f(a+h)$ $\rightarrow$ $f'(c)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $\rightarrow$ Nos lleva a la definición de derivada (variación instantánea) cuando el incremento $h\rightarrow 0$.

Ejemplo

Comprobar que $f(x)=x^2+x+1$ cumple las condiciones del Teorema de Lagrange en el intervalo $[1,4]$ y obtener el valor $c\in(a,b)$ que predice el Teorema.

En efecto, la función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ por ser polinómica. En particular, lo será continua en el intervalo $[1,4]$ y derivable en $(1,4)$.

$$f(1)=3 \quad , \quad f(4)=21 \quad \rightarrow \quad \frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{21-3}{4-1}=\frac{18}{3}=6$$

Por el Teorema de Lagrange sabemos que $\exists c\in(1,4)/f'(c)=6$. Es decir:

$$f'(x)=2x+1 \quad \rightarrow \quad f'(c)=2c+1 \quad \rightarrow \quad f'(c)=6 \quad \rightarrow \quad 2c+1=6 \quad \rightarrow \quad c=\frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{5}{2}\in(1,4)$$

El Teorema de Lagrange también es utilizado en la **demostración de desigualdades entre funciones**.

Ejemplo

Demostrar que $\ln(1+x)<x, \ \forall x>0$.

Partimos de la función $f(x)=\ln(1+x)$ en el intervalo cerrado $[0,x]$, siendo x un valor real arbitrario y positivo.

La función $f(x)$ es continua en $[0,x]$ y derivable en $(0,x)$, por lo que podemos aplicar el Teorema del valor medio ==> $\exists c\in(0,x)/f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

Sustiyendo valores:

$$\frac{1}{1+c}=\frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{1+c}=\ln(1+x)$$

Si $c\in(0,x)$ ==> $0<c<x$ ==> $1<1+c<1+x$ ==> $1>\frac{1}{1+c}>\frac{1}{1+x}$ ==> $x>\frac{x}{1+c}>\frac{x}{1+x}$

Y llevando esta desigualdad al resultado $\frac{x}{1+c}=\ln(1+x)$ obtenemos:

$\frac{x}{1+c}=\ln(1+x)$ ==> $x>\ln(1+x)$, como queríamos demostrar.

Teorema de Cauchy

Si el Teorema de Lagrange generaliza al Teorema de Rolle, el Terema de Cauchy hace lo propio con Lagrange.

En el Terema de Cauchy vamos a relacionar dos funciones $f(x)$ y $g(x)$. Si $g(x)=x$ veremos que recuperamos el Teorema de Lagrande de los incrementos finitos.

Teorema de Cauchy

Sean $f(x)$ y $g(x)$ continuas en $[a,b]$, derivables en (a,b) , tales que $g(a)\neq g(b)$ y $g'(x)\neq 0,\ \forall x\in(a,b)$ ==> $\exists c\in(a,b)\,/\,\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Demostración: Partimos de la función auxiliar $h(x)=f(x)\cdot[g(b)-g(a)]-g(x)\cdot[f(b)-f(a)]$, que cumple las condiciones del Teorema de Rolle.

- $h(x)$ continua en $[a,b]$ por ser diferencia de funciones continuas en ese intervalo.
- $h(x)$ derivable en (a,b) por ser diferencia de funciones derivables en ese intervalo.
- Comprobemos que $h(a)=h(b)$:
  - $h(a)=f(a)\cdot[g(b)-g(a)]-g(a)\cdot[f(b)-f(a)]=f(a)\cdot g(b)-g(a)\cdot f(b)$
  - $h(b)=f(b)\cdot[g(b)-g(a)]-g(b)\cdot[f(b)-f(a)]=-f(b)\cdot g(a)+g(b)\cdot f(a)$
  - En efecto, se cumple $h(a)=h(b)$

Con estas condiciones el Teorema de Rolle afirma que $\exists c\in(a,b)/h'(c)=0$. Si derivamos $h(x)$:

$$h'(x)=f'(x)\cdot[g(b)-g(a)]-g'(x)[f(b)-f(a)]$$

$$h'(c)=0\ \rightarrow\ h'(c)=f'(c)\cdot[g(b)-g(a)]-g'(c)[f(b)-f(a)]=0$$

$$f'(c)\cdot[g(b)-g(a)]=g'(c)[f(b)-f(a)]\ \rightarrow\ \frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Tal y como queríamos demostrar. Como ya adelantamos, si $g(x)=x$ recuperamos el Teorema de Lagrange.

El Teorema de Cauchy nos garantiza que si $f(x)$ y $g(x)$ cumplen las condiciones del teorema en el intervalo $[a,b]$, existe al menos un punto c del intervalo donde el cociente de las derivadas evaluadas en el punto c coincide con el cociente de las diferencias de las funciones evaluadas en los extremos del intervalo.

Ejemplo

Hallar en qué punto del intervalo $[0,2]$ las funciones $f(x)=x^3$ y $g(x)=-x^2+1$ cumplen las condiciones del Teorema de Cauchy.

$f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[0,2]$ y derivables en $(0,2)$ por ser polinómicas.

$g(0)=1,\ g(2)=-3$ ==> $g(0)\neq g(2)$

$g'(x)=-2x \rightarrow g'(x)=0 \rightarrow -2x=0 \rightarrow x=0 \rightarrow 0\notin(0,2)$

Una vez confirmadas las condiciones del Teorema de Cauchy, podemos afirmar que $\exists c\in(0,2)$ / $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(2)-f(0)}{g(2)-g(0)}$. En efecto:

$f'(x)=3x^2 \rightarrow f'(x)=3c^2$

$g'(x)=-2x \rightarrow g'(c)=-2c$

$f(2)=8,\ f(0)=0$

$g(2)=-3,\ g(0)=1$

Sustituyendo estos valores:

$$\frac{3c^2}{-2c}=\frac{8-0}{-3-1} \rightarrow \frac{-3c}{2}=\frac{8}{-4} \rightarrow \frac{3c}{2}=2 \rightarrow c=\frac{4}{3} \rightarrow \frac{4}{3}\in(0,2)$$

Regla de L'Hôpital

Esta regla nos permite resolver indeterminaciones en límites de cocientes que tienden a un factor $\frac{0}{0}$ cuando $x \to x_0$.

Igualmente es válida si el cociente tiende a la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, ya que como bien sabemos podemos convertir un factor $\frac{0}{0}$ en un factor $\frac{\infty}{\infty}$ operando convenientemente con el numerador y el denominador.

Hablamos de “regla” y no de “teorema” ya que no obtenemos un resultado nuevo que satisfaga las condiciones iniciales, sino que el resultado es una técnica instrumental útil para operar con el límite de partida.

Regla de L'Hôpital

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en $[a,b]$, derivables en $\{(a,b)-\{x_0\}\}$, tales que $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ ó $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$.

Sea $x_0\in(a,b)$ y $g'(x)\neq 0,\ \forall x\in\{(a,b)-\{x_0\}\}$.

Entonces, **si existe** $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ **==> existe** $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ **y los límites son iguales**:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Y el resultado final del límite puede ser un valor $L\in\mathbb{R}$ o diverger a infinito.

Demostración (vamos a desarrollar $\frac{0}{0}$): Sea el intervalo arbitrario $[x_0,x]\subset[a,b]$. Si aplicamos el Teorema de Cauchy a las funciones $f(x)$ y $g(x)$ de partida, sabemos que:

$$\exists c\in(x_0,x)\ /\ \frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$$

Las condiciones de partida marcan que $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$, con $f(x)$ y $g(x)$ continuas en $[a,b]$. Por lo tanto:

$$f(x_0)=g(x_0)=0$$

Sustiyendo en la expresión arrojada por el Teorema de Cauchy:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(x)}{g(x)}$$

Si aplicamos el límite por la derecha cuando $x \to x_{0+}$, como $x_0<c<x$ ==> $c \to x_{0+}$ y por lo tanto:

$$\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to x_0+}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to x_0+}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad ==> \quad \lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Si repetimos el mismo razonamiento para el intervalo arbitrario $[x,x_0]\subset[a,b]$ y aplicamos límite por la izquierda cuando $x\to x_{0-}$ obtenemos el resultado análogo:

$$\lim_{x\to x_{0-}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_{0-}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Por lo tanto si existe el límite del cociente de las derivadas debe ser igual al límite del cociente de las funciones de partida:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Importante: **Si el límite del cociente de las derivadas no existe, o no se cumplen las condiciones iniciales de la Regla de L'Hôpital, no significa que no exista el límite de partida**. Deberemos aplicar **otros métodos de estudio** (sacar factor común en numerador y denominador, simplificar, infinitésimos, aplicar logaritmo para luego aplicar exponencial...) para determinar el valor final del límite.

Si tras aplicar L'Hôpital, la indeterminación $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ se mantiene, y las funciones derivadas cumplen las condiciones iniciales de la regla, podemos **volver a aplicar L'Hôpital** en la resolución del nuevo límite formado por el cociente de las derivadas.

Incluso **puede ocurrir que exista el límite del cociente de dos funciones**, que se cumplan todas las condiciones iniciales de la Regla de L'Hôpital, pero **no podamos calcular el límite del cociente de las funciones derivadas**. En este caso sería un error decir que no existe el límite de partida: la conclusión de la regla L'Hôpital solo es válida si además de cumplirse las condiciones iniciales existe el límite del cociente de las funciones derivadas.

¿Un ejemplo de esto último? $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$. El valor del límite es 1 y podemos resolverlo dividiendo numerador y denominador por la máxima potencia x^2 . Si no operamos así y aplicamos directamente L'Hôpital mantendremos la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$; y si aplicamos L'Hôpital una segunda vez recuperamos el mismo límite de partida... Es decir, entramos en un bucle sin salida si aplicamos una y otra vez la Regla de L'Hôpital.

Ejemplo

Comprobar que podemos aplicar la Regla de L'Hôpital a $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x}$ y obtener el valor del límite.

$f(x)=sen(x)$ es continua en $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ y derivable en $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ por ser función seno.

$g(x)=x$ es continua en $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ y derivable en $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ por ser polinómica.

$f(0)=sen(0)=0$

$g(0)=0$

$0\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$g'(x)=1 \rightarrow g'(x)\neq 0, \forall x\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

Por lo tanto, se cumplen todas las condiciones iniciales de la Regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x}=\frac{0}{0} \underset{L'Hôpital}{\rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1}=1$$