Teoría – Tema 3

Derivabilidad - Aplicación a funciones

Derivada de una función constante *f(x) = k*

Vamos a aplicar la definición analítica de derivada a una serie de funciones con objeto de obtener reglas prácticas a la hora de derivar.

La función más sencilla de la que podemos partir es la función constante *f(x)* = *k*, con *k* perteneciente a los reales.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=0$$

$f'(x)=\frac{d[k]}{dx}=0$ → La derivada de una constante es *0.*

Derivada de una suma de funciones *f(x) = g(x) + z(x)*

Sea la función *f(x) = g(x) + z(x)*. Aplicando la definición de derivada:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)+z(x+h)-g(x)-z(x)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{z(x+h)-z(x)}{h}=g'(x)+z'(x)$$

$$f'(x)=\frac{d[g(x)+z(x)]}{dx}=g'(x)+z'(x)$$

Es decir: la derivada de la suma es la suma de las derivadas.

Derivada de una constante por una función *f(x) = k·g(x)*

Sea la función *f(x) = k·g(x)*, con *k* perteneciente a los números reales.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k\cdot g(x+h)-k\cdot g(x)}{h}=k\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$f'(x)=\frac{d[k\cdot g(x)]}{dx}=k\cdot g'(x)$$

La derivada de una constante por una función, es la constante por la derivada de la función.

Derivada de una recta *f(x) = m·x+n*

Sea la función *f(x) = m·x + n*, con *m, n* pertenecientes a los números reales. Podemos aplicar las reglas de la derivada de la suma, la derivada de una constante, y la derivada de una constante por una función, o bien razonar a partir de la definición analítica de derivada:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{m\cdot(x+h)+n-m\cdot x-n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{m\cdot h}{h}=m$$

$$f'(x)=\frac{d[m\cdot x+n]}{dx}=m$$

La derivada de una recta es la pendiente de la recta, como ya sabíamos de la definición geométrica de derivada.

Derivada de una potencia de exponente entero *f(x) = x^n^*

Sea la función $f(x) = x^n$, con n perteneciente a los enteros (ojo, a los enteros, no a los reales).

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

Donde debemos hacer uso del binomio de Newton para desarrollar la potencia $(x+h)^n$ (para más información sobre el binomio de Newton y números combinatorios, consultar el enlace: http://www.vitutor.com/pro/1/a_11.html).

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+n\cdot x^{n-1}\cdot h+\frac{n(n-1)}{2}\cdot x^{n-2}\cdot h^2+\ldots+h^n-x^n}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{n\cdot x^{n-1}\cdot h+\frac{n(n-1)}{2}\cdot x^{n-2}\cdot h^2+\ldots+h^n}{h}$$

Simplificando con el factor *h* del denominador:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0} n\cdot x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot x^{n-2}\cdot h+\ldots+h^{n-1}=n\cdot x^{n-1}$$

$$f'(x)=\frac{d[x^n]}{dx}=n\cdot x^{n-1}$$

En la derivada de una potencia de exponente entero *n*, el exponente "baja" a multiplicar a la potencia elevada a *(n-1)*. Podemos generalizar esta norma:

$$f(x)=g(x)^n \quad\rightarrow\quad f'(x)=n\cdot g(x)^{n-1}\cdot g'(x)$$

Derivada del cuadrado de una función *f(x) = [g(x)]²*

Sea la función *f(x) = [g(x)]²*. Su derivada será:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[g(x+h)]^2-[g(x)]^2}{h}$$

El numerador podemos expresarlo como una diferencia de cuadrados (suma por diferencia).

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{[g(x+h)+g(x)]\cdot[g(x+h)-g(x)]}{h}$$

Rompemos el límite en un producto de límites.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}[g(x+h)+g(x)]\cdot\lim_{h\to 0}\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h}$$

En el primer término del producto tenemos $\lim_{h\to 0}[g(x+h)+g(x)]$ y si *g(x)* es continua (para poder ser derivable), se cumple:

$$\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)\ \rightarrow\ \lim_{h\to 0}[g(x+h)+g(x)]=2\cdot g(x)$$

El segundo término del producto es la definición de derivada para *g(x)*. Por lo tanto:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}[g(x+h)+g(x)]\cdot\lim_{h\to 0}\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h}=2\cdot g(x)\cdot g'(x)$$

$$f'(x)=\frac{d[(g(x))^2]}{dx}=2\cdot g(x)\cdot g'(x)$$

Este resultado lo vamos a utilizar para demostrar a continuación la derivada del producto de funciones.

Derivada del producto de funciones *f(x) = g(x)·z(x)*

Sea la función $f(x) = g(x)\cdot z(x)$.

Vamos a considerar también la función $t(x) = [g(x) + z(x)]^2$.

De la derivada de $t(x)$ vamos a obtener una expresión para la derivada de $f(x)$.

La derivada de $t(x) = [g(x) + z(x)]^2$ podemos obtenerla de dos formas distintas, usando los resultados de las demostraciones previas.

Si consideramos la derivada del cuadrado de una función tendremos:

$$t(x)=[g(x)+z(x)]^2$$
$$t'(x)=2\cdot[g(x)+z(x)]\cdot\frac{d[g(x)+z(x)]}{dx}=2\cdot[g(x)+z(x)]\cdot[g'(x)+z'(x)]$$
$$t'(x)=2\cdot g(x)\cdot g'(x)+2\cdot g(x)\cdot z'(x)+2\cdot z(x)\cdot g'(x)+2\cdot z(x)\cdot z'(x)$$

Y si desarrollamos el cuadrado, y luego aplicamos la derivada de la suma:

$$t(x)=g^2(x)+z^2(x)+2\cdot g(x)\cdot z(x)$$
$$t'(x)=2\cdot g(x)\cdot g'(x)+2\cdot z(x)\cdot z'(x)+2\cdot\frac{d[g(x)\cdot z(x)]}{dx}$$

Ambas expresiones para $t'(x)$ deben ofrecer el mismo resultado. Igualando y simplificando el factor común 2:

$$g(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot z'(x)+z(x)\cdot g'(x)+z(x)\cdot z'(x)=g(x)\cdot g'(x)+z(x)\cdot z'(x)+\frac{d[g(x)\cdot z(x)]}{dx}$$

Y despejando la derivada del producto:

$$\frac{d[g(x)\cdot z(x)]}{dx}=g'(x)\cdot z(x)+g(x)\cdot z'(x)$$

Es decir, la derivada del producto de funciones es la derivada de la primera por la segunda sin derivar más la primera sin derivar por la derivada de la segunda.

Derivada del cociente de funciones

Sea la función *f(x)*. Si multiplicamos y dividimos por una función *g(x)* que no se anule, tendremos $f(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)$. Derivando como un producto:

$$f'(x)=\frac{d[\frac{f(x)}{g(x)}]}{dx}\cdot g(x)+\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g'(x)$$

Despejando el factor derivada del cociente:

$$\frac{d[\frac{f(x)}{g(x)}]}{dx}=\frac{f'(x)-\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g'(x)}{g(x)}$$

$$\frac{d[\frac{f(x)}{g(x)}]}{dx}=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

La derivada de un cociente de funciones es la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador por la derivada del denominador, todo ello dividido por el cuadrado de la función denominador.

Derivada de una función compuesta. Regla de la cadena

Sea la función $f(x)=(g\circ t)(x)=g(t(x))$. Es decir, *f(x)* es el resultado de componer *t(x)* con *g(x)* (primero se aplica *t(x)* y posteriormente *g(x)*, por eso leemos *t(x) compuesta con g(x)*).

Si *t(x)* tiene derivada en *x*, y *g(x)* tiene derivada en los valores de la imagen de t(x), podemos aplicar la definición de derivada:

$$f'(x)=(g\circ t)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(g\circ t)(x+h)-(g\circ t)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(t(x+h))-g(t(x))}{h}$$

Si $t(x)$ es una función constante, la composición de funciones $(g\circ t)(x)$ también es una constante, y su derivada será cero.

Si $t(x)$ no es una constante, satisface $t(x+h)-t(x)\neq 0$. Si multiplicamos y dividimos la definición de derivada anterior por este factor, tendremos:

$$f'(x)=(g\circ t)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(t(x+h))-g(t(x))}{t(x+h)-t(x)}\cdot\frac{t(x+h)-t(x)}{h}$$

$$f'(x)=(g\circ t)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(t(x+h))-g(t(x))}{t(x+h)-t(x)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{t(x+h)-t(x)}{h}$$

$$f'(x)=(g\circ t)'(x)=g'(t(x))\cdot t'(x)$$

Esta regla de la cadena para composición de dos funciones podemos generalizarla para composición de tres o más funciones. Por ejemplo:

$$f(x)=(g\circ t\circ z)(x)=g(t(z(x)))$$

$$f'(x)=(g\circ t\circ z)'(x)=g'(t\circ z(x))\cdot t'(z(x))\cdot z'(x)$$

Derivada de una potencia de exponente racional no entero *f(x) = x^p/q^*

Sea la función $f(x) = x^{p/q}$, con *p* y *q* perteneciente a los enteros. El cociente *p/q* será un número racional. Vamos a partir de la siguiente igualdad:

$$x^{\frac{p}{q}\cdot q}=x^p$$

Derivamos ambos miembros, aplicando a la izquierda la regla de la cadena y a la derecha la derivada de una potencia de exponente entero:

$$\frac{d}{dx}(x^{\frac{p}{q}\cdot q})=\frac{d}{d(x)}(x^p) \rightarrow \frac{d}{dx}(x^{\frac{p}{q}})^q=\frac{d}{d(x)}(x^p) \rightarrow q\cdot(x^{\frac{p}{q}})^{q-1}\cdot\frac{d}{dx}(x^{\frac{p}{q}})=p\cdot x^{p-1}$$

Despejamos el factor derivada de una potencia de exponente racional:

$$\frac{d}{dx}(x^{\frac{p}{q}})=\frac{p\cdot x^{p-1}}{q\cdot(x^{\frac{p}{q}})^{q-1}}$$

Operando potencias de la misma base, obtenemos:

$$\frac{d}{dx}(x^{\frac{p}{q}})=\frac{p}{q}\cdot x^{\frac{p}{q}-1}$$

Esta expresión es análoga a la que obtuvimos para potencia de exponente entero.

Podemos generalizar esta expresión para una potencia de exponente real (no necesariamente entero o racional) y para una función no necesariamente polinómica:

$$\frac{d}{dx}(x^a)=a\cdot x^{a-1}, \quad a\in\mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)^a)=a\cdot f(x)^{a-1}, \quad a\in\mathbb{R}$$

Derivada de la función exponencial e^x

Sea la función *f(x)* = e^x. Aplicamos la definición de derivada:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x\cdot e^h-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x\cdot(e^h-1)}{h}=e^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$$

Llegados a este punto recordamos el desarrollo de la exponencial en serie de potencias (que introdujimos en el trabajo voluntario de grupo sobre las Series de Taylor):

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...$$

Si $x\to 0$ ==> $1+x\gg\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...$ ==> $e^x\simeq 1+x$

Aplicando esta conclusión a nuestra expresión anterior de definición de derivada sobre la exponencial:

$$e^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\simeq e^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1+h-1}{h}=e^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=e^x\cdot\lim_{h\to 0}1=e^x$$

Es decir:

$$\frac{d(e^x)}{dx}=e^x$$

La derivada de la función exponencial, es la misma función exponencial. Con ayuda de la regla de la cadena podemos generalizar esta expresión:

$$\frac{d(e^{f(x)})}{dx}=e^x\cdot f'(x)$$

Derivada de la función logarítmica ln(x)

Sea la función *f(x) = ln(x)*. Vamos a utilizar el concepto de que la función exponencial es la inversa de la función logarítmica.

$$x=e^{\ln(x)}$$

Diferenciamos en ambos miembros. A la izquierda tenemos un polinomio de grado uno, y a la derecha podemos aplicar la regla de la cadena.

$$1=e^{\ln(x)}\cdot\frac{d(\ln(x))}{dx} \quad\rightarrow\quad \frac{d(\ln(x))}{dx}=\frac{1}{e^{\ln(x)}} \quad\rightarrow\quad \frac{d(\ln(x))}{dx}=\frac{1}{x}$$

Podemos generalizar esta expresión, con ayuda de la regla de la cadena:

$$\frac{d[\ln(f(x))]}{dx}=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

Para logaritmos de base distinta a la base natural (número e), obtenemos aplicando el mismo razonamiento:

$$\frac{d(\log_a(x))}{dx}=\frac{1}{\ln(a)}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\frac{d[\log_a(f(x))]}{dx}=\frac{1}{\ln(a)}\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}$$

Derivada de funciones trigonométricas

Sea la función *f(x) = sen(x)*.

$$\lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sen(x)\cdot\cos(h)+\cos(x)\cdot sen(h)-sen(x)}{h}$$

Llegados a este punto, recordamos el desarrollo en serie de potencias del seno y del coseno.

$$sen(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^x}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...$$

$$\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^x}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...$$

Para valores próximos a cero, podemos realizar las siguientes aproximaciones:

$$x\to 0 \quad ==> \quad x\gg\frac{-x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+... \quad ==> \quad sen(x)\simeq x$$

$$x\to 0 \quad ==> \quad 1\gg\frac{-x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+... \quad ==> \quad \cos(x)\simeq 1$$

Aplicando estos resultados a la definición anterior de derivada del seno:

$$\lim_{h\to 0}\frac{sen(x)\cdot\cos(h)+\cos(x)\cdot sen(h)-sen(x)}{h}\simeq\lim_{h\to 0}\frac{sen(x)+\cos(x)\cdot h-sen(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\cdot h}{h}$$

Simplificando el factor *h* en numerador y denominador:

$\dfrac{d(sen(x))}{dx}=\cos(x)$ → La derivada del seno es el coseno.

Generalizando esta expresión:

$$\frac{d[sen(f(x))]}{dx}=\cos(x)\cdot f'(x)$$

Si repetimos el razonamiento anterior para *f(x) = cos(x)*, llegamos a los siguientes resultados:

$$\frac{d(\cos(x))}{dx}=-sen(x)$$

$$\frac{d[\cos(f(x))]}{dx}=-sen(x)\cdot f'(x)$$ → La derivada del coseno es menos el seno.

La derivada de la tangente podemos obtenerla aplicando la ley deducida, anteriormente, para el cociente de funciones, ya que $tg(x)=\frac{sen(x)}{\cos(x)}$.

$$\frac{d(tg(x))}{dx}=\frac{1}{\cos^2(x)}=\frac{\cos^2 x+sen^2 x}{\cos^2(x)}=1+tg^2(x)$$

Derivada de funciones trigonométricas inversas

Sea la función *f(x) = arcosen(x)*. Vamos a razonar a partir de la relación inversa entre seno y arcoseno.

$$x = sen(arcosen(x))$$

Derivando a ambos lados, con ayuda de la regla de la cadena:

$$1 = \cos(arcosen(x)) \cdot \frac{d(arcosen(x))}{dx}$$

Despejando el diferencial del arcoseno:

$$\frac{d(arcosen(x))}{dx} = \frac{1}{\cos(arcosen(x))}$$

La relación fundamental de trigonometría nos dice que $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, para cualquier ángulo alfa. Despejando el coseno:

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1 - sen^2\alpha}$$

Para el caso concreto $\alpha = arcosen(x)$, tendremos en el diferencial:

$$\frac{d(arcosen(x))}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - (sen(arcosen(x)))^2}}$$

Y seno y arcoseno son funciones inversas. Por lo tanto:

$$\frac{d(arcosen(x))}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Podemos generalizar este resultado:

$$\frac{d[arcosen(f(x))]}{dx}=\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

Aplicando el mismo razonamiento para *f(x) = arcocos(x)*, obtenemos:

$$\frac{d(arcocos(x))}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d[arcocos(f(x))]}{dx}=\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

E igualmente con *f(x) = arcotg(x)*, recordando la derivada de la tangente, obtenemos:

$$\frac{d(arcotg(x))}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$
$$\frac{d[arcotg(f(x))]}{dx}=\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$$