Teoría – Tema 3

Derivabilidad - Definición de derivada

Un ejemplo: velocidad media y velocidad instantánea

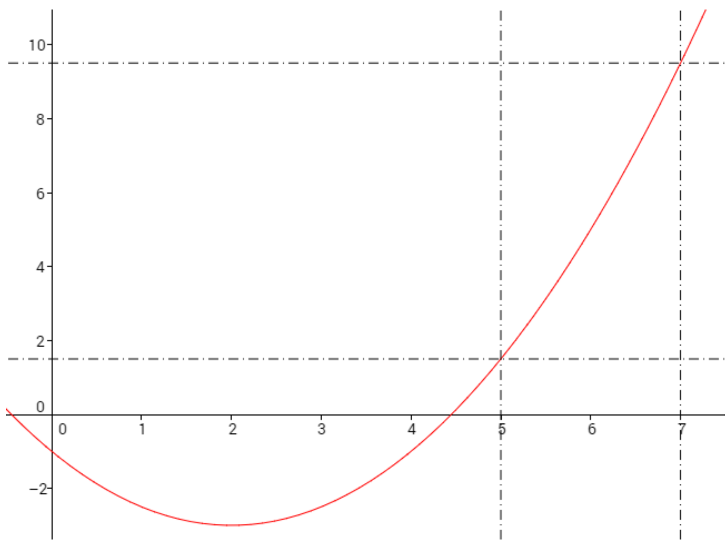
Pensemos en un objeto que se desplaza en el tiempo, según una función *e(t)* llamada espacio recorrido. Este desplazamiento es lineal, es decir, en una sola dimensión. La variable independiente es el tiempo *t* medido en segundos. La variable dependiente *e(t)* se mide en metros.

Imaginemos que en un tiempo inicial $t_0=5\ s$ el objeto se encuentra en la posición $e_0=\frac{3}{2}\ m$. Supongamos también que el espacio recorrido se rige por la expresión analítica $e(t)=\frac{t^2}{2}-2t-1$. ¿En qué posición se encontrará en un tiempo final $t_f=7\ s$?

Aplicando la función para $t_f=7\ s$ es fácil obtener $e(7)=\frac{7^2}{2}-2\cdot 7-1 \rightarrow e_f=\frac{19}{2}\ m$.

Podemos representar gráficamente este desplazamiento para todo tiempo.

------- $e(t)=\frac{t^2}{2}-2t-1$



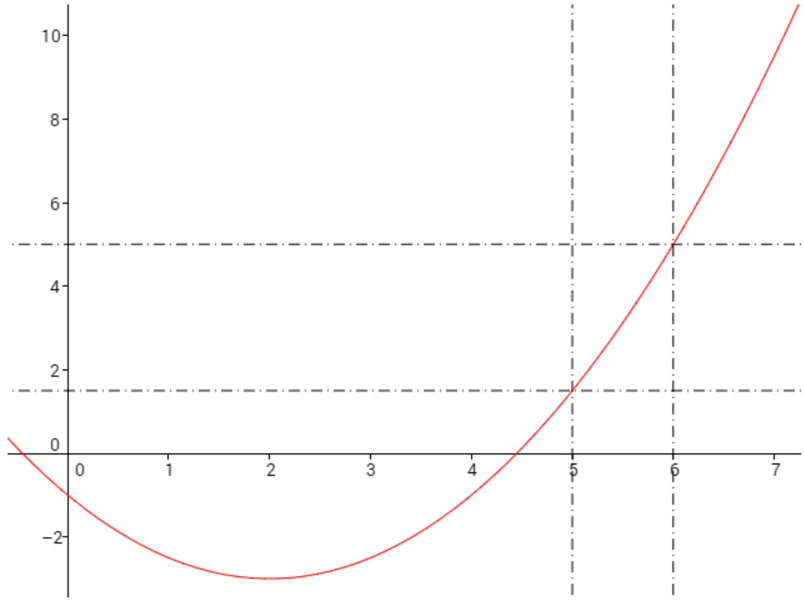
Sabemos que la velocidad se define como la variación del espacio en un intervalo de tiempo. En el intervalo *[5 s, 7 s]* podemos calcular la **velocidad media**:

$$v_{media}=\frac{espacio_{final}-espacio_{inicial}}{tiempo_{final}-tiempo_{inicial}}=\frac{e_f-e_0}{t_f-t_0} \quad \rightarrow \quad v_{media}=\frac{\frac{19}{2}-\frac{3}{2}}{7-5}=\frac{16}{4}=4\ m/s$$

¿Significa este valor de *4 m/s* que siempre ha viajado a esa velocidad? No, es una **estimación media**. Si en *2 segundos* (la diferencia entre *7 s* y *5 s*) ha recorrido 8 metros (la diferencia entre $19/2$ metros y $3/2$ metros), la velocidad media nos dice que "en términos medios" cada segundo implica un avance de *4 metros*.

Cambiemos ahora el tiempo final y consideremos $t_f=6\ s$. El espacio final será $e(6)=\frac{6^2}{2}-2\cdot 6-1 \quad \rightarrow \quad e_f=5\ m$.

$e(t)=\frac{t^2}{2}-2t-1$

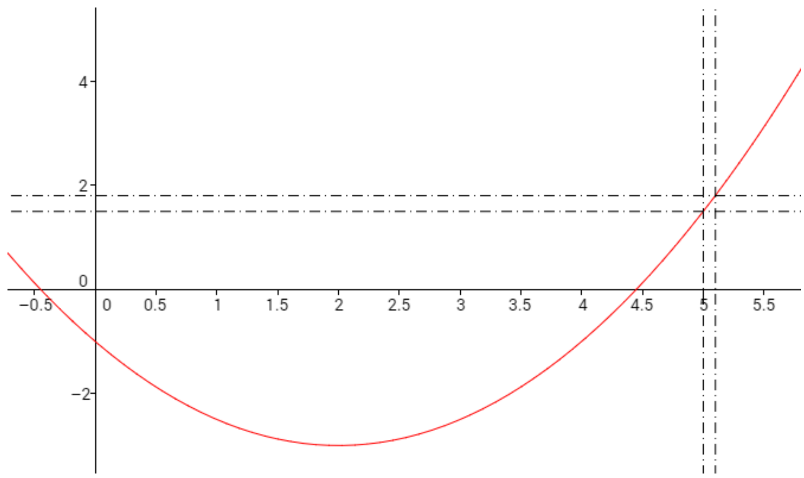


$$v_{media}=\frac{espacio_{final}-espacio_{inicial}}{tiempo_{final}-tiempo_{inicial}}=\frac{e_f-e_0}{t_f-t_0} \quad \rightarrow \quad v_{media}=\frac{5-\frac{3}{2}}{6-5}=\frac{7}{2}\ m/s$$

Para el nuevo intervalo *[5 s, 6 s]* la velocidad media ha cambiado respecto al intervalo anterior. Ahora su valor es $7/2\ m/s$.

Cambiemos nuevamente el tiempo final y consideremos $t_f=5{,}1\ s$. El espacio final será $e(5{,}1)=\frac{(5{,}1)^2}{2}-2\cdot(5{,}1)-1 \rightarrow e_f=1{,}805\ m$.

$e(t)=\frac{t^2}{2}-2t-1$



$$v_{media}=\frac{espacio_{final}-espacio_{inicial}}{tiempo_{final}-tiempo_{inicial}}=\frac{e_f-e_0}{t_f-t_0} \rightarrow v_{media}=\frac{1{,}805-\frac{3}{2}}{5{,}1-5}=\frac{0{,}305}{0{,}1}=3{,}05\ m/s$$

Para el nuevo intervalo *[5 s, 5.1 s]* la velocidad media ha cambiado. Ahora su valor es $3{,}05\ m/s$.

Podemos iterar este proceso tantas veces como queramos, tomando tiempos finales t_f cada vez más cercanos al tiempo inicial $t_0=5\ s$. Cuanto menor sea la diferencia t_f-t_0 más nos acercaremos al concepto de **velocidad instantánea** para el tiempo $t_0=5\ s$.

En el caso ideal $t_f-t_0 \to 0$ podemos definir la velocidad instantánea de nuestro objeto en $t_0=5\ s$ con la expresión:

$$\begin{array}{r} t_0=5 \\ t_f=5+h \\ t_f-t_0=h>0 \end{array} \rightarrow v_{instantánea}(t=5)=\lim_{h\to 0}\frac{e(5+h)-e(5)}{5+h-5}=\lim_{h\to 0}\frac{e(5+h)-e(5)}{h}$$

Si desarrollamos la expresión de la función *e(t)* para los valores *e(5+h)* y *e(h)* tendremos:

$$v_{instantánea}(t=5)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(5+h)^2}{2}-2(5+h)-1-[\frac{5^2}{2}-2(5)-1]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2}{2}+\frac{10\text{h}}{2}-2\text{h}}{h}$$

$$v_{instantánea}(t=5)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2}{2}+3\text{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{2}+3 \;\rightarrow\; v_{instantánea}(t=5)=3\ m/s$$

Este valor de *3 m/s* sí nos da una idea exacta de la **velocidad de nuestro objeto para un instante concreto** (en nuestro caso, t = 5 s).

Si deseamos obtener la **expresión analítica *v(t)* válida para cualquier tiempo del desplazamiento**, podemos definir la función velocidad instantánea *v(t)* como la derivada del espacio *e(t)* en función del tiempo *t*.

$$v(t=5)=\lim_{h\to 0}\frac{e(t+h)-e(t)}{t+h-t}$$

Para nuestro ejemplo concreto $e(t)=\frac{t^2}{2}-2\text{t}-1$ tendremos:

$$v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(t+h)^2}{2}-2(t+h)-1-[\frac{t^2}{2}-2(t)-1]}{h}$$

$$v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2}{2}+\frac{2\cdot t\cdot h}{2}-2\text{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{2}+t-2 \;\rightarrow\; v(t)=t-2$$

Es decir, la función $v(t)=t-2$ nos da la velocidad instantánea para cualquier tiempo por ser la derivada de la función *e(t)*. Y podemos denotarlo de las maneras ya conocidas:

$$e'(t)=v(t) \;\leftrightarrow\; \frac{d[e(t)]}{dt}=v(t)$$

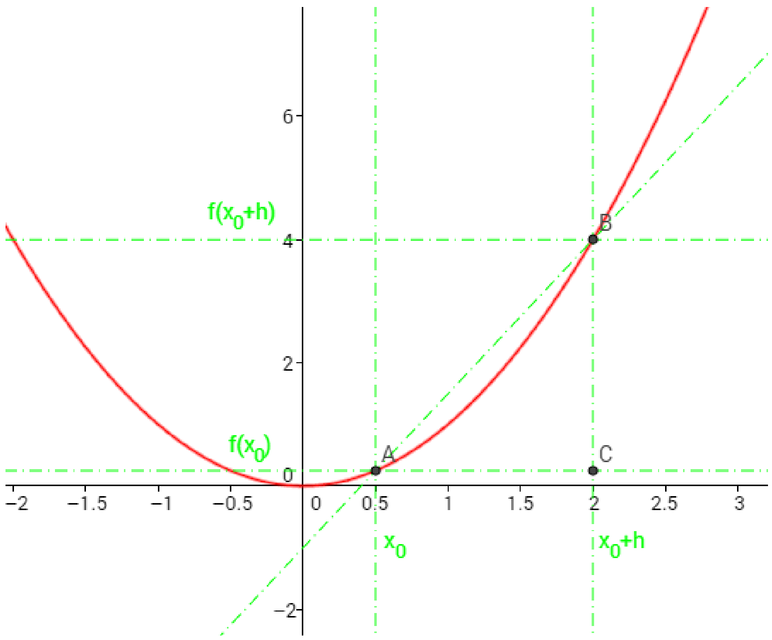
Generalizando para cualquier función f(x)

El razonamiento seguido en el apartado anterior para obtener la velocidad instantánea *v(t)* a partir de la curva de desplazamiento *e(t)*, es válido para cualquier función *f(x)* sobre la que deseemos estudiar su variación para distintos intervalos de la variable independiente *x*.

Supongamos una función genérica *f(x)* y un punto x_0 perteneciente al dominio de la función. Consideremos una cantidad $h > 0$. Podemos definir el **incremento medio de la función *f(x)*** para el intervalo $[x_0, x_0 + h]$ de la forma:

$$Incremento\ medio\ de\ f(x)\ en\ [x_0, x_0+h] = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

------- *f(x) arbitrario*



Del triángulo rectángulo *ABC* representado en la gráfica podemos ver el incremento medio de *f(x)* en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$ como el cociente entre la altura y la base del triángulo.

Altura → $f(x_0 + h) - f(x_0)$

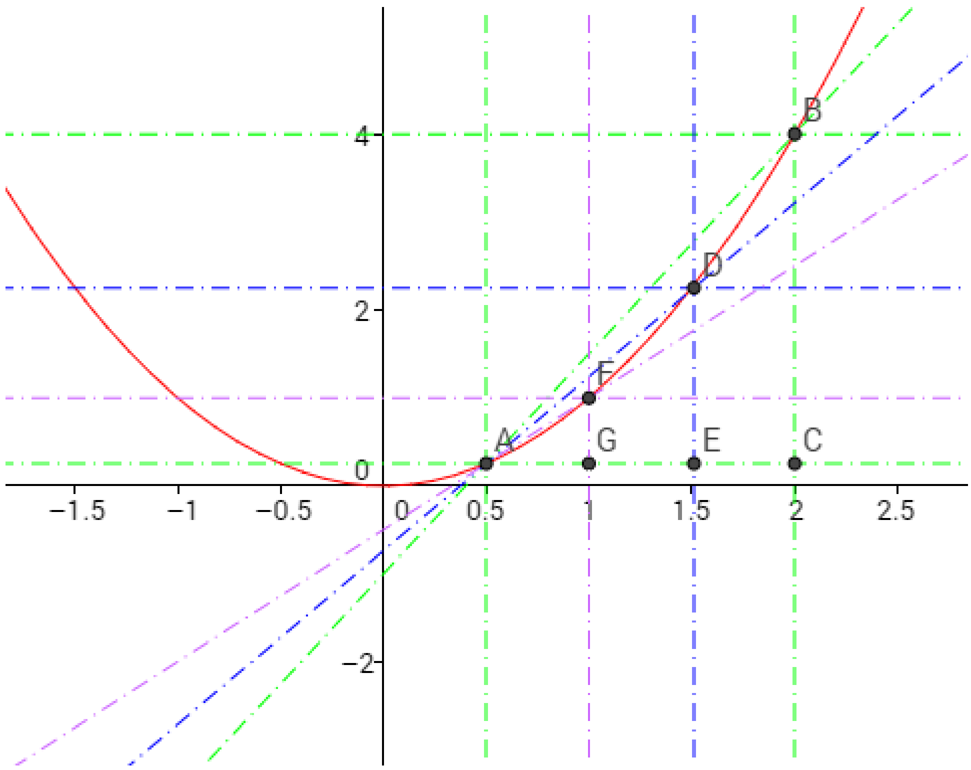
Base → $x_0 + h – x_0 = h$

Es más, si consideramos el ángulo del vértice *A* podemos ver el incremento medio de *f(x)* como la tangente del ángulo *A*.

$$tg(A) = \frac{lado\ opuesto}{lado\ contiguo} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Si tomamos valores de *h* cada vez más pequeños, el valor $x_0 + h$ se acercará progresivamente a x_0.

------- *f(x) arbitrario*



Es fácil intuir que en el caso límite $h \to 0$ tendremos $x_0 + h \to x_0$, y la recta que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h, f(x_0+h))$ ya no cortará a la gráfica de f(x) en dos puntos sino únicamente en el punto $(x_0, f(x_0))$. Para $h \to 0$ ya no hablamos de incremento medio sino de **incremento instantáneo de *f(x)***.

Es decir, en el caso límite $h \to 0$ la recta que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h, f(x_0+h))$ será tangente a *f(x)* en el punto $(x_0, f(x_0))$ y su pendiente (tangente del ángulo *A*) será igual al valor del incremento instantáneo de f(x).

$$Incremento\ instantáneo\ de\ f(x)\ en\ x=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Para un punto genérico *x* este incremento instantáneo de *f(x)* es su derivada. Y su **interpretación geométrica nos dice que la derivada de *f(x)* en el punto genérico *x* es igual al valor de la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto *x***.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad\leftrightarrow\quad \frac{d[f(x)]}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Una vez obtenida la definición analítica de la derivada de *f(x)* podemos preguntarnos por la **derivabilidad de la función en un punto x_0.** Es decir:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Si este límite existe y es finito, decimos que la función es derivable en $x = x_0$. Y si el límite es finito, como el denominador vale *0*, el numerador también debe valer *0*.

$$\lim_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0)]=0 \quad\to\quad \lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim_{h\to 0} f(x_0) \quad\to\quad \lim_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$$

Si hacemos $x = x_0 + h$, nuestra expresión queda:

$$\lim_{h\to 0} f(x)=f(x_0)$$

Y si $h \to 0$, significa que $x \to x_0$. Por lo tanto:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Es decir, el límite de la función *f(x)* cuando $x \to x_0$ es igual al valor de la función en x_0. Y esta es la definición de continuidad en un punto. Por lo tanto, **si una función es derivable en x_0 también será continua en x_0. El inverso, no siempre es cierto**.

De la misma manera que en continuidad estudiamos los límites laterales (en asíntotas verticales, en funciones definidas a trozos, etc.), en derivabilidad también podemos hablar de derivada por la izquierda y derivada por la derecha.

$$f'(x_0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Si ambos límites existen, son finitos y son iguales, decimos que existe la derivada de la función en el punto x_0.

$$f'(x_0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad = \quad f'(x_0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad\to\quad \exists f'(x_0)$$

Concluyendo: **para afirmar la derivabilidad de una función *f(x)* en un punto x_0 debemos:**

1. Demostrar la continuidad de *f(x)* en x_0.

2. Aplicar la definición analítica de derivada en x_0 y comprobar si el resultado es finito. En funciones definidas a trozos, deberemos calcular las derivadas laterales y confirmar que son iguales y finitas. Y si no nos dicen lo contrario, podremos calcular la expresión de la derivada usando las reglas que veremos más adelante, para evitar así el uso más complejo de la definición analítica.