Problemas – Tema 3

Solución a problemas de Derivabilidad - Hoja 09 - Problemas 2, 5

Hoja 9. Problema 2

2. Demuestra que la ecuación $x^2 = x \cdot sen(x) + \cos(x)$ **tiene solo dos raíces reales.**

Sea la función $f(x) = x^2 - x \cdot sen(x) - \cos(x)$. Es continua y derivable en toda la recta real por ser polinómica y producto con funciones senos y coseno.

Si la función tuviera tres raíces reales, que llamaremos c_1, c_2, c_3 , se cumplirá que $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = 0$, y podremos aplicar el Teorema de Rolle. En consecuencia, existirán dos valores que anulen la primera derivada.

$$f'(x) = 2x - (sen(x) + x\cos(x)) + sen(x) = 2x - x\cos(x) = x(2 - \cos(x))$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(2 - \cos(x)) = 0 \rightarrow x = 0 \ , \ \cos(x) = 2$$

La segunda igualdad $\cos(x) = 2$ no tiene solución, ya que la función coseno está acotada en el intervalo $[-1,1]$. Por lo tanto, la derivada solo se anula en un único punto $x = 0$.

Y llegamos a un absurdo, ya que deberían existir dos soluciones. Por lo tanto, no existen tres raíces reales. Ahora vamos a demostrar que solo hay dos raíces.

El punto crítico $x = 0$ es un mínimo relativo, ya que la segunda derivada evaluada en $x = 0$ es positiva.

$$f''(x) = 2 - (\cos(x) - x\,sen(x)) \rightarrow f''(0) = 1 > 0 \rightarrow x = 0 \text{ es mínimo}$$

Si evaluamos el mínimo en la función → $f(0) = -1$ → mínimo en $(0, -1)$

Si evaluamos en $x = -10$ → $f(-10) > 0$ → $f(-10) \cdot f(0) < 0$ → Por Bolzano existe una solución en el intervalo $(-10, 0)$.

Si evaluamos en $x = 10$ → $f(10) > 0$ → $f(0) \cdot f(10) < 0$ → Por Bolzano existe una solución en el intervalo $(0, 10)$.

Conclusión: existen dos soluciones.

Hoja 9. Problema 5

5. Demuestra que la ecuación $x^3-27x+m=0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $(-1,1)$, cualquiera que sea el valor de m .

Hipótesis de partida: $f(x)=x^3-27x+m$ posee dos soluciones en el intervalo $(-1,1)$.

Si llamamos a estas soluciones $c_1, c_2 \in (-1,1)$, se cumple:

$$f(c_1)=0 \quad , \quad f(c_2)=0 \quad \rightarrow \quad f(c_1)=f(c_2)$$

La función es continua y derivable en toda la recta realpor ser polinómica. Por lo que podemos aplicar el Teorema de Rolle en el intervalo (c_1, c_2) . Recuerda que $c_1, c_2 \in (-1,1)$. Por lo tanto:

$$\exists \varphi \in (-1,1) / f'(\varphi)=0 \quad \rightarrow \quad f'(x)=3x^2-27 \quad , \quad f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad 3x^2-27=0 \quad \rightarrow \quad \varphi=\pm 3$$

Y llegamos a un absurdo, ya que si $\varphi=\pm 3$ no se cumple $\varphi \in (-1,1)$. En consecuencia la hipótesis no es cierta. No puede haber más de una raíz en el intervalo.