Problemas – Tema 3

Solución a problemas de Derivabilidad - Hoja 05 - Problemas 1, 4, 5

Hoja 5. Problema 1

Resuelto por Gabriel Manzano (noviembre 2014)

1. ¿En qué puntos no es derivable $f(x)$?

$$f(x)=\begin{cases} 3x^3-27 & si \quad x<2 \\ -3 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$$

En primer lugar estudiamos la continuidad de la función.

Intervalos abiertos:

$x<2 \rightarrow f(x)$ es continua por ser un polinomio

$x>2 \rightarrow f(x)$ es continua por ser una constante

Punto frontera $x=2$:

$$f(2)=-3$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(3x^3-27)=-3 \quad , \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} -3=-3$$

Como el valor del límite tanto por la izquierda como por la derecha coinciden, y es igual al valor de la función en el punto $x=2$, la función es continua en $x=2$.

Ahora vamos a estudiar la derivabilidad de la función. La función derivada es la siguiente:

$$f'(x)=\begin{cases} 9x^2 & si \quad x<2 \\ 0 & si \quad x>2 \end{cases}$$ → Dejamos los intervalos abiertos

Intervalos abiertos:

$x<2 \rightarrow f'(x)$ es continua porque se trata de un monomio $\rightarrow f(x)$ derivable

$x>2 \rightarrow f'(x)$ es continua por ser una constante $\rightarrow f(x)$ derivable

Punto frontera $x=2$:

$$f(2^-) \rightarrow \lim_{x \to 2^-} 9x^2 = 36 \ , \ f(2^+) \rightarrow \lim_{x \to 2^+} 0 = 0 \rightarrow 36 \neq 0$$

La función no es derivable en $x=2$.

Hoja 5. Problema 4

Resuelto por Gabriel Manzano (diciembre 2014)

4. Determinar a y b para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x^2+3 & si & x<0 \\ a\,x+b & si & 0\leq x\leq 2 \\ x^3-1 & si & x>2 \end{Bmatrix}$$

Continuidad en los intervalos abiertos:

$x>0 \;\rightarrow\; f(x)$ continua por ser polinómica

$0<x<2 \;\rightarrow\; f(x)$ continua por ser polinómica

$x>2 \;\rightarrow\; f(x)$ continua por ser polinómica

Punto frontera $x=0$:

$f(0)=b$

$\lim_{x\to 0-} f(x)=3 \;,\; \lim_{x\to 0+} f(x)=b \;\rightarrow\; b=3$

Punto frontera $x=2$:

$f(2)=2a+b=2a+3$

$\lim_{x\to 2-} f(x)=2a+3 \;,\; \lim_{x\to 2+} f(x)=7 \;\rightarrow\; 2a+3=7 \;\rightarrow\; a=2$

Hoja 5. Problema 5

Resuelto por Antonio Galdó (diciembre 2014)

5. Obtener m y n para que $f(x)$ sea continua. Estudia su derivabilidad para esos valores.

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} x^2+1 & si & x<0 \\ mx+n & si & 0\leq x\leq 3 \\ x-5 & si & x>3 \end{array}\right\}$$

Intervalos abiertos:

$x<0 \rightarrow f(x)$ continua por ser polinómica

$0<x<3 \rightarrow f(x)$ continua por ser polinómica

$x>3 \rightarrow f(x)$ continua por ser polinómica

Punto frontera $x=0$:

$$f(0)=(mx+n)=n$$

$$\lim_{x\to 0^-}(x^2+1)=1 \ , \ \lim_{x\to 0^+}(mx+n)=n \rightarrow n=1$$

Punto frontera $x=3$:

$$f(3)=(mx+n)=3m+1$$

$$\lim_{x\to 3^-}(mx+n)=3m+1 \ , \ \lim_{x\to 3^+} x-5=-2 \rightarrow 3m+1=-2 \rightarrow m=-1$$

Estudiamos la derivabilidad, sustituyendo los valores obtenidos:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} 2x & si & x<0 \\ -1 & si & 0<x<3 \\ 1 & si & x>3 \end{array}\right\}$$ → Fíjate que dejamos los intervalos abiertos

Intervalos abiertos:

$x<0$ → $f'(x)$ continua por ser polinómica → $f(x)$ es derivable
$0<x<3$ → $f'(x)$ continua por ser constante → $f(x)$ es derivable
$x>3$ → $f'(x)$ continua por ser constante → $f(x)$ es derivable

Punto frontera $x=0$:

$\lim_{x\to 0^-} 2x=0$, $\lim_{x\to 0^+} -1=-1$ → $0\neq -1$ → Las derivadas laterales no coinciden → la función no es derivable en $x=0$.

Punto frontera $x=3$:

$\lim_{x\to 3^-} -1=-1$, $\lim_{x\to 3^+} 1=1$ → $-1\neq 1$ → Las derivadas laterales no coinciden → la función no es derivable en $x=3$.