Problemas – Tema 3

Solución a problemas de Derivabilidad - Hoja 04 - Problemas 7

Hoja 4. Problema 7

Resuelto por Jaime Díaz (diciembre 2014)

7. Obtener a y b para que $f(x)$ sea derivable para cualquier valor de x .

$$f(x)=\begin{cases} a+bx-x^2 & si \quad x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & si \quad x>1 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en todo ℝ, tiene que ser continua en todo ℝ.

Las condiciones de continuidad en el punto $x=x_0$ son:

$$\exists\ f(x_0), x_0\in Df$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L\,, L\in R$$

$$f(x_0)=L$$

Las condiciones para que sea derivable en el punto $x=x_0$ son:

$$f(x) \quad sea \quad continua \quad en \quad x_0$$

$$f'(x_0^-)=f'(x_0^+)$$

Primero estudiamos la continuidad en los intervalos abiertos y luego en los puntos frontera.

$x<1\Rightarrow f(x)=a+b\,x-x^2$ → continua por ser polinómica

$x>1\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x}$ → continua salvo donde se anula el denominador, pero $x=0\notin(1,\infty)$

En el punto frontera $x=1$:

$f(1)=a+b-1$

$\lim_{x\to 1^-} a+bx-x^2=a+b-1$, $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x}=1 \to a+b-1=1 \to a+b=2$

Estudiamos la derivabilidad.

$f'(x)=\begin{cases} b-2x & si \quad x<1 \\ \frac{-1}{x^2} & si \quad x>1 \end{cases}$ → Recuerda: dejamos los intervalos abiertos

$x<1 \to f'(x)=b-2x$ → continua por ser polinómica → f(x) es derivable

$x>1 \to f'(x)=\frac{-1}{x^2}$ → continua salvo donde se anula el denominador, pero $x=0\notin(1,\infty)$ → f(x) es derivable

En el punto frontera $x=1$:

$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-} b-2x=b-2$, $f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{x^2}=-1 \to b-2=-1 \Rightarrow b=1$

Uniendo esta nueva condición a la relación obtenida $a+b=2$:

$b=1,\ a+b=2 \Rightarrow a=1$ → Valores para que $f(x)$ sea continua y derivable en $\mathbb{R}$.