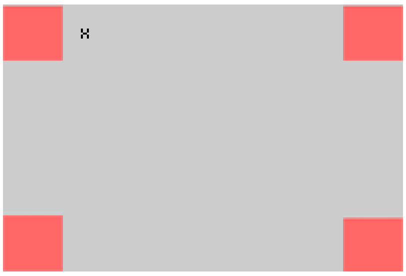
Problemas – Tema 3

Solución a problemas de Derivabilidad - Hoja 03 - Problemas 1, 5, 7

Hoja 3. Problema 1

Resuelto por Pablo Martínez (diciembre 2014)

1. Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones $80\,cm \times 50\,cm$ un cuadrado de lado x y doblando convenientemente, se construye una caja. Calcular x para que volumen de dicha caja sea máximo.



$V=(80-2x)(50-2x)x=4x^3-260x^2+4000x$

$V'=12x^2-520x+4000$, $V'=0 \rightarrow 12x^2-520x+4000=0 \rightarrow x=10\,cm$, $x=33{,}3\,cm$

Calculamos la segunda derivada.

$V''=24x-520$

$V''(10)=240-520<0 \rightarrow x=10$ es un máximo relativo

$V''(33{,}3)>0 \rightarrow x=33{,}3$ es un máximo relativo → pero no tiene sentido físico porque para $x=33{,}3\,cm$ el volumen se hace negativo

Solución: $x=10\,cm$

Hoja 3. Problema 5

Resuelto por Carlos Pareja (noviembre 2014)

5. Con un hilo de $60\,cm$, formar un rectángulo que, al girar alrededor de uno de sus lados, engendre un cilindro de área lateral máxima.

Si del hilo obtenemos un rectángulo de base x , altura y , su perímetro será $60\,cm$.

$$x+y+x+y=60 \rightarrow 2x+2y=60 \rightarrow x+y=30 \rightarrow y=30-x \;\; (relación\ entre\ variables)$$

Si giramos el cuadrado alrededor de la altura y , generaremos un cilindro de radio x y altura y . La cara lateral del cilindro genera un rectángulo de altura y base el perímetro de la circunferencia de la base. Es decir:

$S=2\pi x y$ $\rightarrow$ función a maximizar

El área lateral depende de las variables (x, y) relacionadas anteriormente. Por lo tanto:

$$S=2\pi x(30-x)=60\pi x-2\pi x^2$$

Derivamos e igualamos a cero para aplicar la condición necesaria de extremo relativo.

$$S'=60\pi-4\pi x, \;\; S'=0 \rightarrow 60\pi=4\pi x \rightarrow x=\frac{60\pi}{4\pi}=15 \rightarrow y=30-15=15$$

Calculamos la derivada derivada para comprobar si $x=15$ es un máximo relativo.

$S''=-4\pi<0 \rightarrow x=15$ es un máximo

Solución: $x=15\ cm$, $y=15\ cm \rightarrow S_{\underset{max}{lateral}}=2\pi\cdot 15\cdot 15=450\pi\ m^2$

Hoja 3. Problema 7

Resuelto por Pedro Talavera (noviembre 2014)

7. Usando la definición de derivada, calcula la derivada en $x=-1$, $x=0$ y $x=2$ de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{Bmatrix} 2x+3 & si & x\leq 0 \\ x^2+2 & si & x>0 \end{Bmatrix}$$

Para saber si la función es derivable en los puntos dados, primero vemos si es continua.

En los intervalos abiertos $x<0$ y $x>0$ es continua, por ser funciones polinómicas.

En el punto frontera $x_0=0$:

$$f(x_0)=0+3=3$$

$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=3$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=2$ $\rightarrow$ Los límites laterales no coinciden

Por lo tanto la función no es continua en $x_0=0$, por presentar una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito. Y si no es continua en ese punto, tampoco será derivable.

La definición de derivada es $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Y la función es derivable en un punto donde es continua, si las derivadas laterales coinciden.

Para $x=-1$ el estudio se reduce a estudiar la convergencia del límite siguiente:

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{2(-1+h)+3-(2(-1)+3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=\lim_{h\to 0} 2=2$$

La función es derivable en $x=-1$ y la derivada en ese punto vale 2 .

Para $x=2$ el estudio se reduce a estudiar la convergencia del límite siguiente:

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} \quad \rightarrow \quad \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2+2-(2^2+2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0} h+4=4$$

La función es derivable en $x=2$ y la derivada en ese punto vale 4 .