Problemas – Tema 3

Solución a problemas de Derivabilidad - Hoja 11 - Todos resueltos

Hoja 11. Problema 1

1. Se tiene un alambre de 1 m de longitud y se desea dividirlo en dos trozos para formar con uno de ellos un círculo y con el otro un cuadrado. Determinar la longitud que se ha de dar a cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea mínima.

Ver Hoja 1, Problema 7 → http://danipartal.net/pdf/2bachTema3Hoja1.pdf

Hoja 11. Problema 2

2. Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función definida a trozos.

$$f(x)=\begin{cases} x-1+\cos(x-1) & si \quad x\leq 1 \\ \dfrac{sen(x-1)}{x-1} & si \quad x>1 \end{cases}$$

Para estudiar la continuidad, estudiamos en primer lugar los intervalos abiertos.

$(-\infty,1) \rightarrow f(x)$ es continua por ser suma de polinomio y función coseno.

$(1,\infty) \rightarrow f(x)$ es continua porque el denominador solo se anula en $x=1\notin(1,\infty)$.

En el punto frontera $x=1$ aplicamos las condiciones de continuidad.

$$f(1)=1$$

$$\lim_{x\rightarrow 1^-}(x-1+\cos(x-1))=1$$

$$\lim_{x\rightarrow 1^+}\frac{sen(x-1)}{x-1}=\frac{0}{0} \rightarrow \text{L'Hôpital} \rightarrow \lim_{x\rightarrow 1^+}\frac{\cos(x-1)}{1}=\frac{1}{1}$$

Los límites laterales coinciden, y además son iguales al valor de la función en $x=1$. Por lo tanto, la función es continua en $x=1$.

La derivabilidad la estudiamos en primer lugar en los intervalos abiertos.

$$f'(x)=\begin{cases} 1-sen(x-1) & si \quad x<1 \\ \dfrac{\cos(x-1)\cdot(x-1)-sen(x-1)}{(x-1)^2} & si \quad x>1 \end{cases}$$

$(-\infty,1) \rightarrow f'(x)$ continua por ser suma de polinomio y seno $\rightarrow f(x)$ derivable.

$(1,\infty) \rightarrow f'(x)$ continua por no anularse denominador en $(1,\infty) \rightarrow f(x)$ derivable.

En el punto frontera $x=1$ las derivadas laterales deben coincidir para que la función sea derivable.

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}(1-sen(x-1))=1$$

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cos(x-1)\cdot(x-1)-sen(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{0}{0}$$ → L'Hôpital →

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{-sen(x-1)\cdot(x-1)+\cos(x-1)-\cos(x-1)}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-sen(x-1)\cdot(x-1)}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-sen(x-1)}{2}=0$$

Las derivadas laterales no coinciden, por lo que la función no es derivable en $x=1$.

Hoja 11. Problema 3

3. Aplicar la definición formal de derivada para obtener la derivada de $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.

$$f(x)=\sqrt{x^2-1} \quad \rightarrow \quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)^2-1}-\sqrt{x^2-1}}{h}=\frac{0}{0}$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado del numerador.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)^2-1}-\sqrt{x^2-1}}{h}\cdot\frac{\sqrt{(x+h)^2-1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{(x+h)^2-1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-1-(x^2-1)}{h\cdot[\sqrt{(x+h)^2-1}+\sqrt{x^2-1}]}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+h^2+2\cdot h\cdot x-1-x^2+1}{h\cdot[\sqrt{(x+h)^2-1}+\sqrt{x^2-1}]}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2\cdot h\cdot x}{h\cdot[\sqrt{(x+h)^2-1}+\sqrt{x^2-1}]}=\lim_{h\to 0}\frac{h+2\cdot x}{[\sqrt{(x+h)^2-1}+\sqrt{x^2-1}]}$$

Evaluamos.

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Hoja 11. Problema 4

4. Una fábrica construye cajas de latón sin tapa de volumen $500\,cm^3$, para almacenar un líquido colorante. Las cajas tienen base cuadrada. Hallar la altura y el lado de la base de cada caja para que la cantidad de latón empleada sea mínima.

La base cuadrada tendrá igual anchura que profundidad → x

La altura de la caja → h

El volumen de la caja → $500=x^2\cdot h$

La cantidad de latón será proporcional a la superficie de la caja (sin tapa). Esta superficie será igual a:

$A=A_{base}+4\cdot A_{lateral}=x^2+4\cdot x\cdot h$ → función a minimizar

Esta función depende de dos variables, por lo que usamos → $500=x^2\cdot h \rightarrow h=\frac{500}{x^2} \rightarrow$ Llevamos esta relación a la función área.

$A=x^2+\frac{2000}{x}$ → Derivamos a igualamos a cero por ser condición necesaria de extremo.

$$A'=2\cdot x-\frac{2000}{x^2}=\frac{2\cdot x^3-2000}{x^2} \quad , \quad A'=0 \rightarrow 2\cdot x^3-2000=0 \rightarrow x^3=1000 \rightarrow x=10$$

Comprobamos si es un mínimo evaluando la segunda derivada.

$A''=2+\frac{4000}{x^3} \rightarrow A''(10)>0 \rightarrow x=10\,cm$ es un mínimo → $h=\frac{500}{x^2}=5\,cm$

Hoja 11. Problema 5

5. Sea f : [1,+∞) → ℝ la función definida por $f(x)=\sqrt{x-1}$. Determina el punto P perteneciente a $f(x)$ que se encuentre a menor distancia del punto $A(2,0)$. ¿Cuál es esa distancia?

Sea $P(x,y)$ el punto de la función buscado. Su distancia al punto $A(2,0)$ será:

$d(P,A)=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$ → función a minimizar

La función distancia depende de dos variables. Sabemos que $P(x,y)\in f(x)$ → por lo tanto $y=f(x)=\sqrt{x-1}$. Llevando este valor a la función distancia, la dejaremos expresada según una única variable.

$$d(x)=\sqrt{(x-2)^2+(\sqrt{x-1})^2}=\sqrt{(x-2)^2+x-1}=\sqrt{x^2+4-4x+x-1}=\sqrt{x^2-3x+3}$$

Derivamos e igualamos a cero, como condición necesaria de extremo relativo.

$$d'(x)=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+3}} \quad , \quad d'(x)=0 \;\rightarrow\; 2x-3=0 \;\rightarrow\; x=\frac{3}{2}$$ → punto crítico

Para determinar si este valor es un mínimo, estudiamos el dominio de la función de partida $d(P,A)=\sqrt{x^2-3x+3}$. Obtenemos las raíces del discriminante.

$$x^2-3x+3=0 \;\rightarrow\; x=\frac{3\pm\sqrt{9-12}}{2}\notin\mathbb{R}$$

El discriminante nunca se anula. Si tomamos, por ejemplo, $x=0 \rightarrow 0-0+3>0$ → El discriminante siempre es positivo → El dominio de la función son todos los números reales. Si evaluamos la función derivada a ambos lados del punto crítico:

$$(-\infty,\frac{3}{2}) \;\rightarrow\; d'(0)<0 \;\rightarrow\; d(x)\downarrow$$

$$(\frac{3}{2},\infty) \;\rightarrow\; d'(2)>0 \;\rightarrow\; d(x)\uparrow$$

Por lo tanto $x=\frac{3}{2}$ minimiza la función distancia.

Así → $y=f(\frac{3}{2})=\sqrt{\frac{3}{2}-1}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ → El punto buscado es $P(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$.

La distancia mínima resulta → $d(\frac{3}{2})=\sqrt{(\frac{3}{2})^2-3(\frac{3}{2})+3}=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+3}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ u$

Hoja 11. Problema 6

6. a) Halla la parábola que pasa por $A(-1,-11)$ y cuyo máximo absoluto sea el punto $B(3,5)$.

b) Dadas las funciones $f(x)=x^2-ax-4$ y $g(x)=\frac{x^2}{2}+b$, halla los valores de a y b de manera que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ tengan la misma recta tangente en el punto $x=3$. Halla la ecuación de esa recta tangente.

a) Ver el vídeo → https://www.youtube.com/watch?v=Ef6iX0MgYEw

b) Ver el vídeo → https://www.youtube.com/watch?v=aARx15z2u58

Hoja 11. Problema 7

7. a) Determina a y b para que $f(x)=\begin{cases} e^{a\cdot x} & si \quad x\leq 0 \\ 2\cdot a+b\cdot sen(x) & si \quad 0<x \end{cases}$ sea derivable en todo su dominio.

b) Demuestra que la ecuación $e^x=2+x$ tiene solamente una solución positiva.

a) Para ser derivable, en primer lugar, la función debe ser continua.
Estudiamos la continuidad en los intervalos abiertos.

$(-\infty,0) \rightarrow f(x)$ continua por ser exponencial
$(0,\infty) \rightarrow f(x)$ continua por ser polinómica más seno

Estudiamos la continuidad en el punto frontera $x=0$.

$$f(0)=1$$
$$\lim_{x\to 0^-} e^{a\cdot x}=1$$
$$\lim_{x\to 0^+}(2\cdot a+b\cdot sen(x))=2\cdot a$$

Igualamos límites laterales → $1=2\cdot a$ → $a=\frac{1}{2}$ → De esta forma existe el límite en $x=0$ y es igual al valor de la función en $x=0$ → La función es continua en $x=0$.
Pasamos a estudiar la derivavilidad, en primer lugar, en los intervalos abiertos.

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} & si \quad x<0 \\ b\cdot\cos(x) & si \quad 0<x \end{cases}$$

$(-\infty,0) \rightarrow f'(x)$ continua por ser exponencial → $f(x)$ es derivable
$(0,\infty) \rightarrow f'(x)$ continua por ser coseno → $f(x)$ es derivable

Estudiamos la derivabilidad en el punto frontera $x=0$, comprobando si las derivadas laterales coinciden.

$$f'(0^-)=\frac{1}{2}$$

$$f'(0^+)=b$$

Igualamos derivadas laterales → $b=\frac{1}{2}$ → condición a cumplir para garantizar que la función sera derivable en $x=0$.

b) Debemos demostrar que $e^x=2+x$ tiene una única solución positiva.

En primer lugar demostramos que posee, al menos, una solución positiva.

Si nombramos $f(x)=e^x-2-x$, esta función es continua en toda la recta real por ser suma de exponencial y polinomio.

$$f(0)<0$$

$$f(10)>0$$

Por lo tanto, estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Bolzano, que nos garantiza que $\exists c\in(0,10)/f(c)=0$ → Al menos, existe una solución positiva, ya que $c>0$ por pertenecer al intervalo $(0,10)$.

La segunda parte de la demostración consiste en demostrar que la solución positiva es única. Para ello suponemos que existen dos soluciones positivas $c_1,c_2/f(c_1)=f(c_2)=0$.

Nuestra función es continua en $[c_1,c_2]$ y derivable en (c_1,c_2) por ser suma de exponencial y polinomio.

Con esto, podemos aplicar el Teorema de Rolle, que afirma $\exists\varphi\in(c_1,c_2)/f'(\varphi)=0$. Derivamos e igualamos a cero.

$$f(x)=e^x-2-x \rightarrow f'(x)=e^x-1 \quad , \quad f'(\varphi)=0 \rightarrow e^{\varphi}-1=0 \rightarrow e^{\varphi}=1 \rightarrow \varphi=0$$

Este resultado es un absurso, porque si $c_1>0$, $c_2>0$ y $\varphi\in(c_1,c_2)$, el valor de φ tiene que ser positivo → Estamos ante un absurdo matemático que contradice a la hipótesis de partida → Por lo que no existen dos soluciones positivas → Nuestra solución positiva es única.