Problemas – Tema 3

Solución a problemas de Derivabilidad - Hoja 01 - Problemas 1, 3, 4, 6, 7

Hoja 1. Problema 1

Resuelto por Curro García Olmedo (noviembre 2014)

1. Obtener la derivada de $f(x)=x\sqrt{2x^2+3x-1}$

$$f'(x)=\sqrt{2x^2+3x-1}+x\cdot\frac{4x+3}{2\sqrt{2x^2+3x-1}}$$

$$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{2x^2+3x-1}\right)\cdot 2\left(\sqrt{2x^2+3x-1}\right)+4x^2+3x}{2\sqrt{2x^2+3x-1}}$$

$$f'(x)\frac{2\cdot(2x^2+3x-1)+4x^2+3x}{2\sqrt{2x^2+3x-1}}=\frac{8x^2+9x-2}{2\sqrt{2x^2+3x-1}}$$

Hoja 1. Problema 3

Resuelto por José Antonio Álvarez Ocete (noviembre 2014)

1. Dada la curva $f(x)=x^3-3x^2+2$

a) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ **en el punto de abscisa** $x=1$ **.**

b) Determina si la curva de $f(x)$ **queda por debajo o por encima de la recta tangente del apartado anterior**

a) Calculamos $f'(x)$ y evaluamos en $x=1$ para hallar la pendiente.

Por otro lado, evaluamos $f(x)$ en $x=1$ para obtener un punto que por el que pase la recta tangente:

$f'=3x^2-6x \rightarrow f'(1)=-3$

$f(1)=1-3+2 \rightarrow f(1)=0 \rightarrow P(1,0)$

Obtenemos la ecuación de la recta.

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=m \rightarrow \frac{y}{x-1}=-3 \rightarrow y=-3x+3$$

Para saber lo pedido debemos esbozar la gráfica. Para ello calculamos los máximos y mínimos anulando la primera derivada.

$f'=3x^2-6x=0 \rightarrow x=0 \;\; ; \;\; x=2$ → puntos críticos

Función $f(x)$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$
Intervalos	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(-10)>0$	$f'(1)<0$	$f'(5)>0$

$x=0$ es un máximo → $(0,2)$

$x=2$ es un mínimo → $(2,-2)$

Estudiamos los posibles puntos de inflexión anulando la segunda derivada.

$f''=6x-6=0$ ➔ $x=1$ → candidato a punto de inflexión

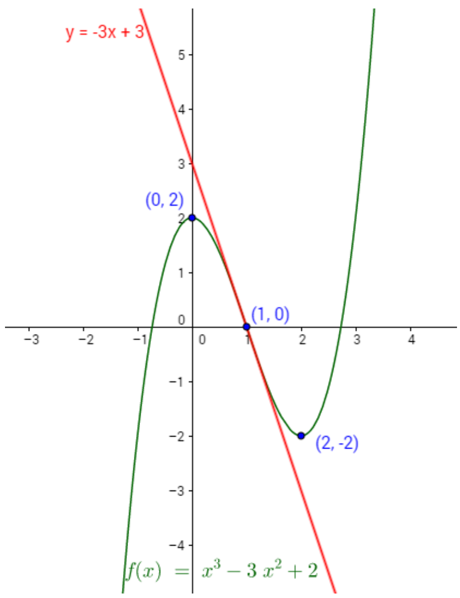
Función $f(x)$	$f(x)\cap$	$f(x)\cup$
Intervalos	$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
Segunda derivada $f''(x)$	$f''(-0)<0$	$f''(5)>0$

Y estimamos si la recta tangente corta a la función en puntos distintos al conocido $(1,0)$.

$f(x)=x^3-3x^2+2$, $y=-3x+3$ → $x^3-3x^2+2=-3x+3$ → $x^3-3x^2+3x-1=0$

$x^3-3x^2+3x-1=0$ → descomponer → $(x-1)^3=0$ → solución única $x=1$

Como muestra la siguiente gráfica $f(x)<y$ para $x<1$, $f(x)>y$ para $x>1$.



Hoja 1. Problema 4

Resuelto por Javier de Orbe (noviembre 2015)

4. Halla la parábola que pasa por $A(-1,-11)$ y cuyo máximo absoluto sea el punto $B(3,5)$.

La parábola es un polinomio de segundo grado del tipo:

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

El extremo relativo (vértice de la parábola) se obtiene derivando e igualando a cero, sabiendo que ese extremo aparece en $B(3,5)$.

$$f(x)=ax^2+bx+c \quad \to \quad f'(x)=2ax+b \quad , \quad f'(3)=0 \quad \to \quad 6a+b=0$$

Si $B(3,5)$ es el vértice, la parábola pasa por ese punto. Es decir:

$$f(3)=5 \quad \to \quad 9a+3b+c=5$$

El enunciado afirma que la función también pasa por el punto $A(-1,-11)$. Por lo tanto:

$$f(-1)=-11 \quad \to \quad a-b+c=-11$$

Las tres ecuaciones planteadas generan un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, cuya solución única es:

$$a=-1 \quad , \quad b=6 \quad , \quad c=-4 \quad \to \quad f(x)=-x^2+6x-4$$

Hoja 1. Problema 6

Resuelto por Andrés Pineda (noviembre 2014)

6. Descomponer el número 44 en dos sumandos tales que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea un mínimo.

Nos piden dos sumandos que den 44 .

$$x+y=44$$

Además nos piden que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea un mínimo

$$5x^2+6y^2 \rightarrow mínimo$$

Es decir primero tendremos que hallar los puntos críticos de esta función, que deberemos expresar según una única variable.

$$x+y=44 ; y=44-x \rightarrow f(x)=5x^2+6\cdot(44-x)^2 \rightarrow f(x)=11x^2-528x+11616$$

Derivamos e igualamos a cero para obtener los puntos críticos.

$$f'(x)=22x-528 ; f'(x)=0 \rightarrow x=\frac{528}{22}=24$$

Hacemos la segunda derivada para ver si es máximo o mínimo:

$f''(x)=22>0 \rightarrow \quad x=24$ es un mínimo

Obtengo el valor de y → $y=44-x ; y=44-24=20 \rightarrow y=20$

Solución: $x=24$, $y=20$

Hoja 1. Problema 7

Resuelto por Alejandro de Haro (noviembre 2015)

7. Se tiene un alambre de 1 m de longitud y se desea dividirlo en dos trozos para formar con uno de ellos un círculo y con el otro un cuadrado. Determinar la longitud que se ha de dar a cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea mínima.

Del alambre obtenemos un círculo de radio r y un cuadrado de lado l .

$$A_{Total}=A_{círculo}+A_{cuadrado}=\pi\cdot r^2+l^2$$

Esta es la función a minimizar. Como depende de dos variables, buscamos relacionarlas con los datos del enunciado. Si el alambre tiene un metro de longitud, la suma de los perímetros de ambas figuras debe ser igual a uno.

$$2\pi r+4l=1 \quad\rightarrow\quad l=\frac{1-2\pi r}{4}$$

Llevamos este resultado a la función área a optimizar. Derivamos a igualamos a cero, para aplicar la condición necesaria de extremo relativo.

$$A_{Total}=\pi\cdot r^2+\left(\frac{1-2\pi r}{4}\right)^2 \quad\rightarrow\quad A'=2\pi r+2\left(\frac{1-2\pi r}{4}\right)\left(\frac{-2\pi}{4}\right) \quad\rightarrow\quad A'=2\pi r-(1-2\pi r)\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$A'=2\pi r-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^2 r}{2} \quad\rightarrow\quad A'=\left(2\pi+\frac{\pi^2}{2}\right)r-\frac{\pi}{4} \quad\rightarrow\quad A'=\left(\frac{4\pi+\pi^2}{2}\right)r-\frac{\pi}{4}$$

$$A'=0 \quad\rightarrow\quad \left(\frac{4\pi+\pi^2}{2}\right)r=\frac{\pi}{4} \quad\rightarrow\quad r=\frac{1}{2(4+\pi)}=\frac{1}{8+2\pi} \quad\rightarrow\quad r\simeq 0{,}07\ldots m$$

Demostremos que es un mínimo → $A''=\left(\frac{4\pi+\pi^2}{2}\right)>0 \quad\rightarrow\quad r\simeq 0{,}07\ldots m$ es un mínimo.

La longitud del trozo de círculo será igual a $2\pi r\simeq 0{,}439\ldots m$.

La longitud del trozo de cuadrado será igual a $1-2\pi r\simeq 0{,}561\ldots m$.