

Instrucciones:

a) Duración: 50 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. Indica, en la primera hoja donde resuelves el examen, la opción elegida.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe a bolígrafo (no a lápiz) ordenadamente y con letra clara. Las faltas de ortografía y la mala presentación pueden restar hasta un máximo de 2 puntos de la nota final (-0,25 por falta, borrón o tachón).

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1.- Aplica la definición formal de derivada para obtener la derivada de las siguientes funciones:

a) [2 puntos] $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

b) [1 punto] $f(x) = (x+1)(x-2)$

Ejercicio 2.- [2 puntos] De la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\frac{ax^2+b}{x}$ se sabe que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x=1$ viene dada por $y=-2$. Calcula a y b .

Ejercicio 3.- [3 puntos] Se sabe que la función $f: [0,5] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} ax+bx^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ c+\sqrt{x-1} & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Es derivable en el intervalo $(0,5)$ y verifica que $f(0)=f(5)$. ¿Cuánto valen a, b y c ?

Ejercicio 4.- [2 puntos] Indica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, justifica por qué lo es. Y si es falsa pon un ejemplo concreto que demuestre que es falsa.

“Si una función $f(x)$ tiene límite por la izquierda en $x=x_0$ igual al valor del límite por la derecha en $x=x_0$, la función es continua en $x=x_0$ ”.

Opción B

Ejercicio 1.- [3 puntos] Justifica de manera razonada el dominio, la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función: $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2} - \text{sen}x}$

Ejercicio 2.- [2 puntos] Estudia la derivabilidad de la siguiente función.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 3.- [2 puntos] Calcular a y b para que $f(x)$ sea continua en $x=0$ y $x=2$. ¿Es derivable $f(x)$ en $x=0$ y $x=2$ para esos valores de a y b ?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{ax + b} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{-x}{2 \cdot \sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Ejercicio 4.- [3 puntos] Estudia la derivabilidad de $f(x) = \left| \frac{x}{x-3} \right|$. Si en algún punto no es continua, indica el tipo de discontinuidad.