Teoría – Tema 2

Extensión a lo que ya sabemos sobre límites y asíntotas de 1bach

Índice de contenido

Asíntotas horizontales y oblicuas en más y en menos infinito.

Al estudiar A.H. o bien A.O. debemos considerar siempre el comportamiento de la variable independiente en más y en menos infinito.

En un cociente de polinomios la A.H. en más infinito coincide siempre con la A.H. en menos infinito. Lo mismo ocurre en un cociente de polininomios con la A.O. (si indicamos esta frase en un examen, nos evitamos tener que hacer explícitamente los ímites en menos infinito).

Pero ojo. Este razonamiento solo sirve en cociente de polinomios. En el momento que aparezca un valor absoluto, una raíz, un logaritmo o una exponencial, debemos hacer los dos límites: tanto en más como en menos infinito.

¿Recuerdas cómo realizar un límite en menos infinito? Cambiando la variable x por $-x$ y cambiando $-\infty$ por $+\infty$ al operar en el límite.

Algunos ejemplos:

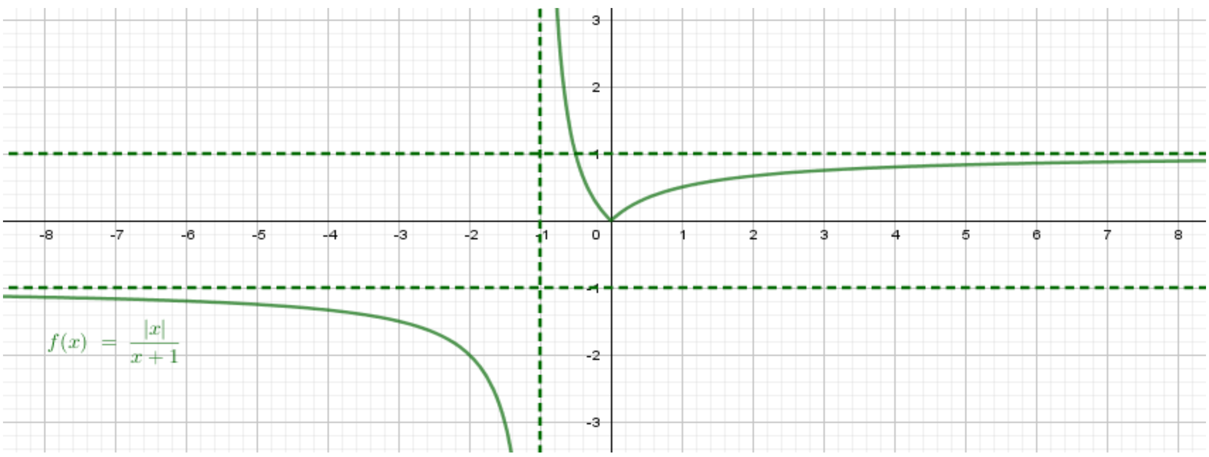
Ejemplo 1. Calcular A.H. de $f(x)=\frac{|x|}{x+1}$

Primero rompemos el valor absoluto → $f(x)=\begin{cases} \frac{-x}{x+1} \; si \; x\leq 0 \; y \; x\neq -1 \\ \frac{x}{x+1} \; si \; x>0 \end{cases}$

Al obtener la A.H. debemos plantear límite tanto en más como en menos infinito. Usando en cada límite la forma adecuada de la función.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$ → A.H. $y=1$ si $x\to+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x+1}=cambios=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{-x+1}=-1$ → A.H. $y=-1$ si $x\to-\infty$



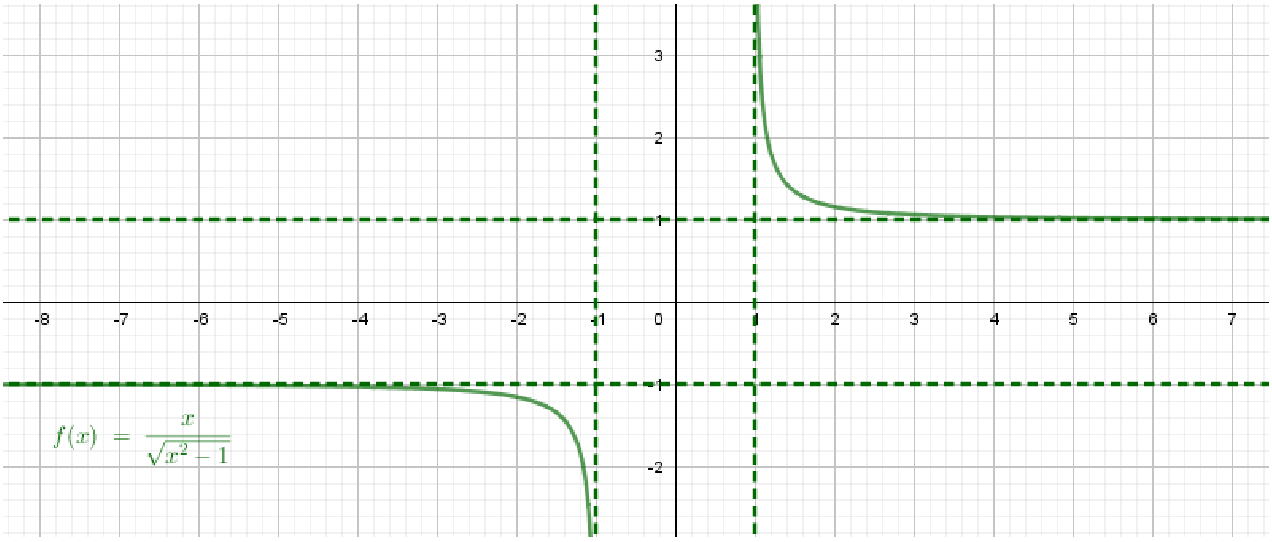
Ejemplo 2. Calcular A.H. de $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=L'\,Hôpital\ entra\ en\ bucle=Dividir\ \ por\ \ máxima\ \ potencia=1$$

A.H. $y=1$ si $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=cambios=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{(-x)^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}=-1$$

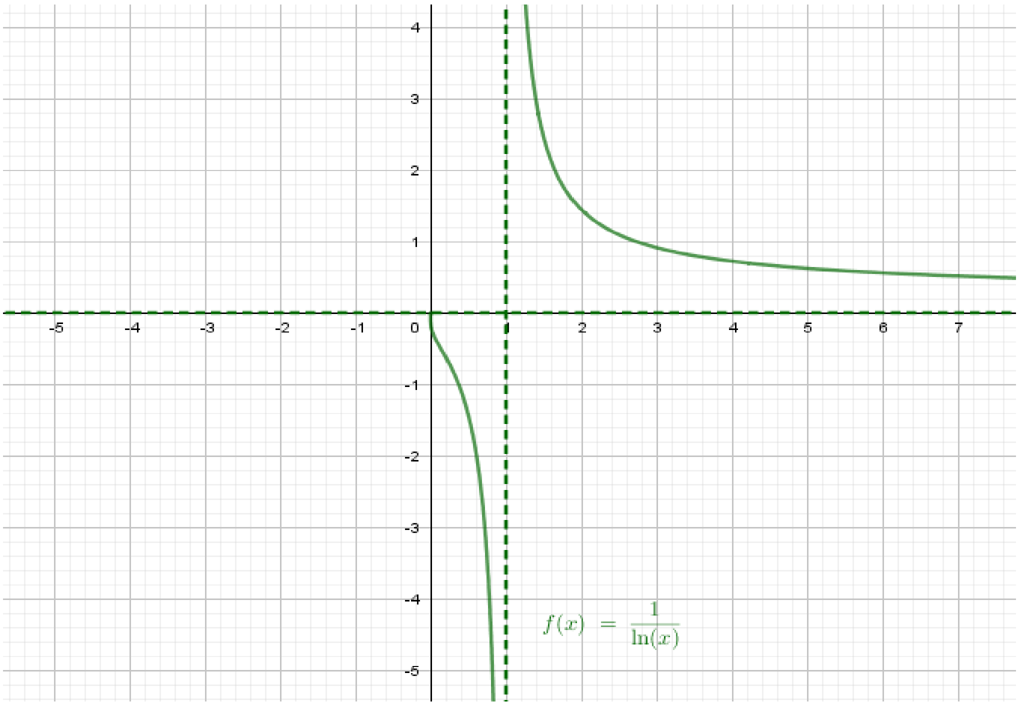
A.H. $y=-1$ si $x\to-\infty$



Ejemplo 3. Calcular A.H. de $f(x)=\frac{1}{\ln x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(x)}=\frac{1}{\infty}=0$$ A.H. $y=0$ si $x\to+\infty$

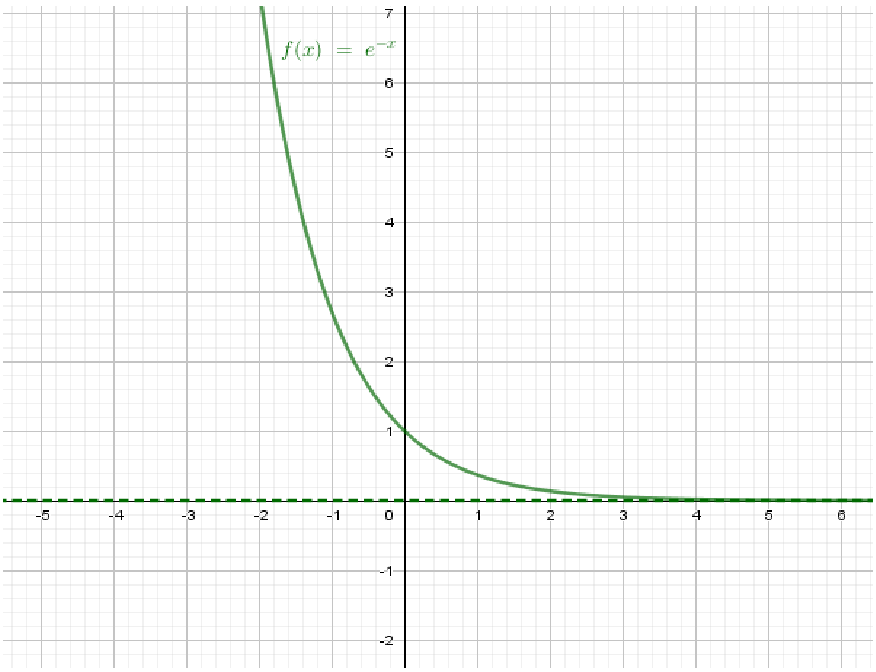
El dominio de la función es $Dom(f)=(0,1)\cup(1,\infty)$, ya que solo existe el logaritmo de números positivos y el denominador se anula en $x=1$. Por lo tanto, no tiene sentido preguntarnos por la A.H. en menos infinito ya que la función no está definida para esos valores.



Ejemplo 4. Calcular A.H. de $f(x)=e^{-x}$

$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad \to$ A.H. $y=0$ si $x \to +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = cambios = \lim_{x \to +\infty} e^{x} = \infty \quad \to$ No existe A.H. si $x \to -\infty$



¿Cómo entender la función seno y coseno en el infinito?

La función seno y la función coseno tienen su imagen acotada al intervalo [-1, 1]. Da igual el valor x que tomemos: siempre se cumple que $-1 \leq sen(x) \leq 1$ y $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

¿Y si x tiende a más o a menos infinito?

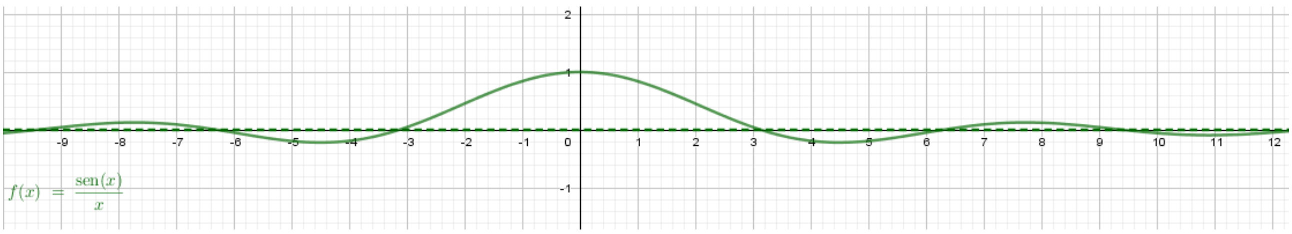
$¿\lim_{x\to\pm\infty} sen(x)?$

$¿\lim_{x\to\pm\infty} \cos(x)?$

El límite no converge a un valor concreto, sino que tomará un valor finito comprendido en el intervalo de acotación [-1, 1]. Conclusión: **no sabemos cuánto vale el seno o el coseno en el infinito, pero sabemos que será un número comprendido entre -1 y 1.**

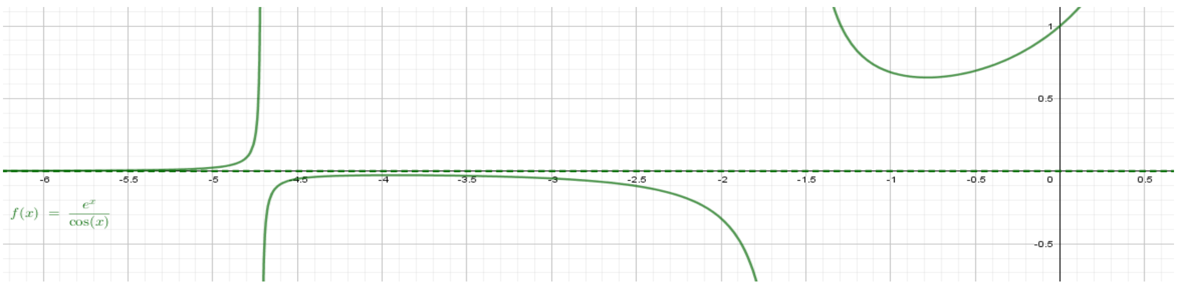
Ejemplo 1. Calcular $\lim_{x\to+\infty} \frac{sen(x)}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{sen(x)}{x} = \frac{k}{\infty}$ → Donde k es un número acotado entre -1 y 1 → Y un número dividido por infinito tiende a cero → $\lim_{x\to+\infty} \frac{sen(x)}{x} = \frac{k}{\infty} = 0$ → A.H. $y=0$ si $x\to+\infty$



Ejemplo 2. Calcular $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{\cos(x)}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{\cos(x)} = cambios = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{\cos(-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x \cdot \cos(-x)} = \frac{1}{\infty \cdot k}$ → k es un número acotado entre -1 y 1 → Infinito por un número da infinito → $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x \cdot \cos(-x)} = \frac{1}{\infty \cdot k} = \frac{1}{\infty} = 0$ → A.H. $y=0$ si $x\to-\infty$



Cortes de una función con sus asíntotas. Posición relativa de una función respecto de sus asíntotas

Una función nunca, nunca, nunca corta a una recta vertical que sea A.V.

Una función sí puede cortar a la A.H. y a la A.O. En el infinito la función se acerca tanto como quiera a la A.H. y a la A.O. sin llegar a cortarla, pero antes de la idealización del infinito la gráfica de la función sí puede cortar a la A.H. y a la A.O.

Estudiar la posición relativa de una función respecto a sus asíntotas significa estudiar cómo se coloca la función respecto a las rectas que forman las asíntotas.

En A.V. hacemos los límites laterales y podremos decidir si la función va hacia más o hacia menos infinito.

En A.H. y en A.O. debemos comprobar si hay puntos de corte entre la función y las asíntotas. Y realizar una tabla de valores de las imágenes de la función y de las asíntotas para decidir quién está por encima o por debajo.

Veamos todo esto con un ejemplo.

Ejemplo 1. Estudiar la posición relativa de la función $f(x)=\frac{x}{x-1}$ **respecto de sus asíntotas.**

$Dom(f)=\mathbb{R}-\{1\}$ → Candidato a A.V. $x=1$ → $\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{0}=\infty$ → Límites laterales

$\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$ → La función se dispara a menos infinito a la izquierda de $x=1$

$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ → La función se dispara a más infinito a la derecha de $x=1$

Al ser un cociente de polinomios, la A.H. en más infinito coincide con la A.H. en menos infinito.

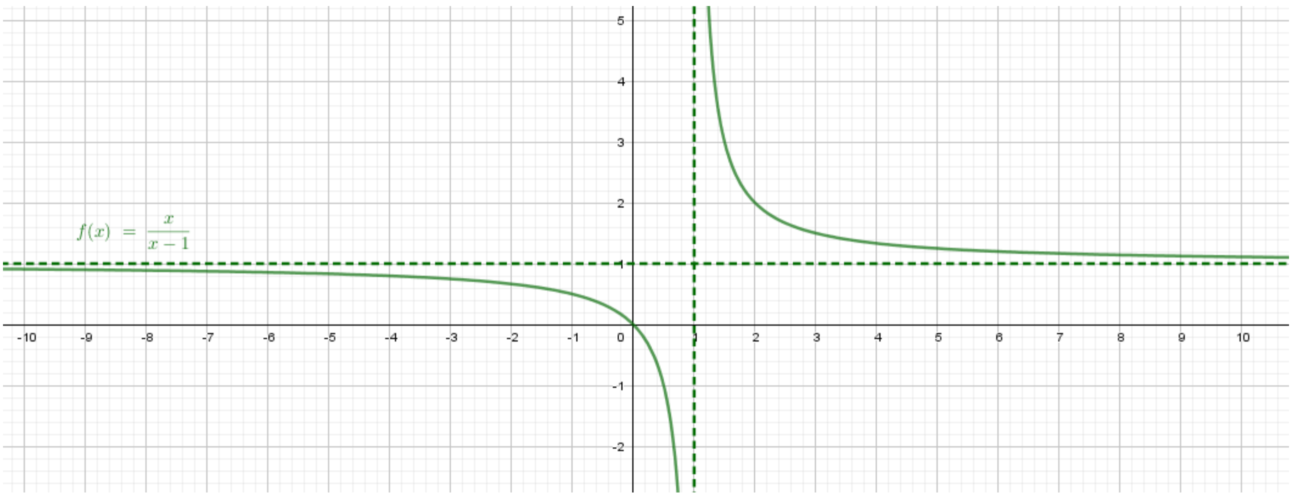
$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=\frac{\infty}{\infty}=dividir\ por\ máxima\ potencia=1$ → $y=1$ A.H. si $x\to\pm\infty$

Para obtener los puntos de corte de la función con la A.H. igualamos la función a la ecuación de la asíntota.

$f(x)=1$ → $\frac{x}{x-1}=1$ → $x=x-1$ → $0=1$ → Absurdo → No hay puntos de corte

Para saber si la función está por encima o por debajo de la A.H. realizamos una tabla de valores en los intervalos formados por los puntos que no pertenecen al dominio y los puntos de corte de la función con la A.H. (que en este caso, no hay).

Intervalo	Función $f(x)=\frac{x}{x-1}$	Asíntota Horizontal $y=1$	Conclusión
$(-\infty,1)$	$f(0)=0$	$y=1$	$0<1$ La función está por debajo de la A.H.
$(1,\infty)$	$f(2)=2$	$y=1$	$2>1$ La función está por encima de la A.H.



Ejemplo 2. Estudiar la posición relativa de la función $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ respecto de sus asíntotas.

$Dom(f)=(0,+\infty)$ → Candidato a A.V. $x=0$ → Como el dominio es $(0,+\infty)$ solo tiene sentido preguntarse por el límite lateral derecho.

$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{x}=\frac{-\infty}{0}=-\infty\cdot\infty=-\infty$ → La función va a menos infinito a la derecha de $x=0$

Como el dominio es $(0,+\infty)$ solo estudiaremos la A.H. en más infinito.

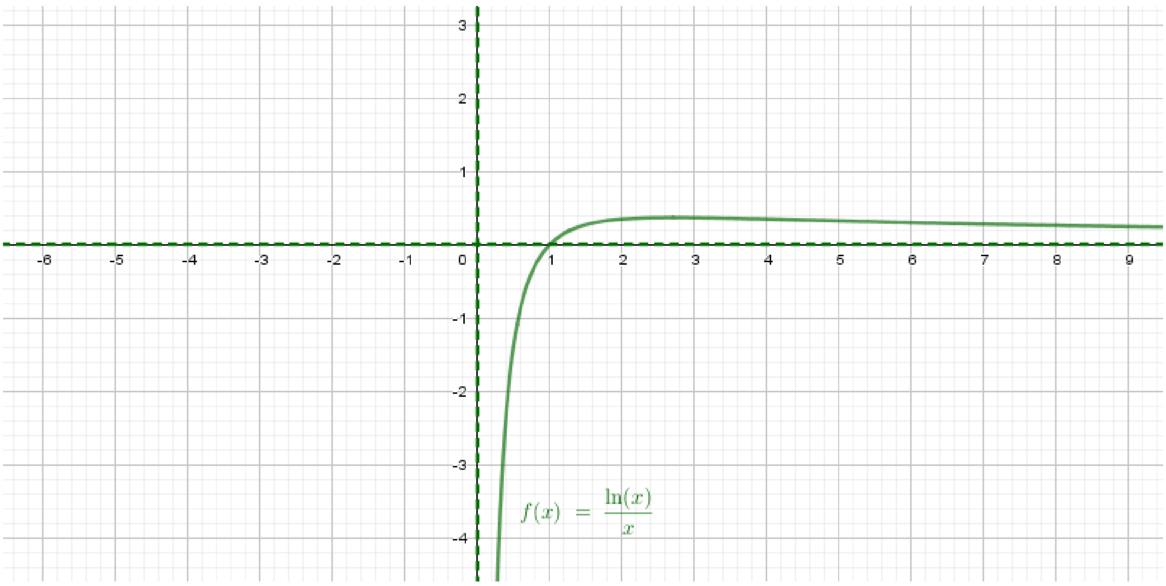
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\frac{\infty}{\infty}=L'Hôpital=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{\infty}=0 \quad\rightarrow\quad y=0 \text{ A.H. si } x\rightarrow+\infty$$

Para obtener los puntos de corte de la función con la A.H. igualamos la función a la ecuación de la asíntota.

$$f(x)=0 \quad\rightarrow\quad \frac{\ln(x)}{x}=0 \quad\rightarrow\quad \ln(x)=0 \quad\rightarrow\quad x=1 \quad\rightarrow \text{Hay un punto de corte}$$

Para saber si la función está por encima o por debajo de la A.H. realizamos una tabla de valores en los intervalos formados por los puntos que no pertenecen al dominio y los puntos de corte de la función con la A.H.

Intervalo	**Función** $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$	**Asíntota Horizontal** $y=0$	**Conclusión**
$(0,1)$	$f(1/2)=\frac{\ln(1/2)}{1/2}$ $f(1/2)\simeq-1{,}39$	$y=0$	$-1{,}39<0$ La función está por debajo de la A.H.
$(1,\infty)$	$f(2)=\frac{\ln(2)}{2}$ $f(2)\simeq0{,}35$	$y=0$	$0{,}35>0$ La función está por encima de la A.H.



Límites laterales en los extremos de un intervalo

Supongamos la sguiente función definida a trozos:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & si\ -2\leq x<0 \\ x^2+1 & si\ 0\leq x<5 \end{cases}$$

Si nos preguntan por la continuidad de la función en los puntos fronteras, deberemos aplicar las condiciones de continuidad en los tres puntos frontera del dominio de definición de la función: $x=-2, x=0, x=5$.

Si recuerdas, una de las condiciones de continuidad es determinar si los límites laterales son iguales.

¿Cómo aplicar límites laterales en $x=-2$ si la función no está definida a la izquierda de $x=-2$? Muy sencillo. Solo deberemos estudiar el límite lateral derecho. Y ese será directamente el límite de la función en $x=-2$.

¿Cómo aplicar límites laterales en $x=5$ si la función no está definida a la derecha de $x=5$? Muy sencillo. Solo deberemos estudiar el límite lateral izquierdo.Y ese será directamente el límite de la función en $x=5$.

Conclusión: **Si una función está definida en un intervalo, solo aplicaremos límites laterales en aquellos lados que estén incluidos dentro del intervalo de definición.**