Teoría – Tema 2

Teoremas de continuidad

Índice de contenido

Postulado de Cantor

Decimos que un intervalo cerrado de número reales $[a_2, b_2]$ está encajado dentro de otro intervalo cerrado $[a_1, b_1]$ si se cumple la siguiente condición:

$$\forall x \in [a_2, b_2] \implies x \in [a_1, b_1]$$

Y se denota matemáticamente de la siguiente forma:

$$[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$$

Con esta definición podemos desarrollar el postulado de Cantor.

Postulado de Cantor

La intersección de infinitos intervalos encajados converge a un único punto $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración: Sea una secuencia infinita de intervalos encajados $I_n = [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$ que cumplen $a_n \leq b_n, \forall n \in N$. Llamemos A al conjunto de los extremos inferiores de cada intervalo, y B al conjunto de los extremos superiores de cada intervalo. Es decir:

$$A = \{a_n\}, n \in \mathbb{N}$$

$$B = \{b_n\}, n \in \mathbb{N}$$

Como los intervalos están encajados sabemos que:

$$\ldots \subset [a_n, b_n] \subset \ldots [a_3, b_3] \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$$

Por lo que cualquier extremo inferior $a_n, n \in \mathbb{N}$ de un intervalo será menor o igual que cualquier extremo superior $b_m, m \in \mathbb{N}$ de ese u otro intervalo. Es decir:

$$a_n \leq b_m, \forall n, m \in N$$

Por lo tanto, el conjunto A está acotado superiormente y el conjunto B está acotado inferiormente.

La menor de las cotas superiores de A es su supremo, y la mayor de las cotas inferiores de B es su ínfimo. Por lo que la intersección de los infinitos intervalos encajados converge a un intervalo de extremo inferior el supremo de A y de extremo superior el ínfimo de B .

$$\cap\{I_n\}, n\in\mathbb{N}=[supremo(A), ínfimo(B)]$$

Si los sucesivos intervalos encajados pueden hacerse infinitamente pequeños, para $\forall\varepsilon>0$ siempre se cumplirá $|ínfimo(B)-supremo(A)|<\varepsilon$. Como ε podemos hacerlo arbitrariamente pequeño:

$$\varepsilon\rightarrow 0 \implies |ínfimo(B)-supremo(A)|\rightarrow 0 \implies ínfimo(B)\rightarrow supremo(A)$$

Por lo que la intersección converge a un único punto $\alpha=ínfimo(B)=supremo(A)$, como queríamos demostrar.

Teorema de acotación

Recordemos que $f(x)$ está acotada superiormente si $\exists k \in \mathbb{R} / k \geq f(x), \forall x \in [a, b]$.

Igualmente, $f(x)$ está acotada inferiormente si $\exists m \in \mathbb{R} / m \leq f(x), \forall x \in [a, b]$.

Tras repasar estos dos conceptos estamos en condiciones de entender el teorema de acotación.

> **Teorema de acotación**
> Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ ==> $f(x)$ está acotada.

Demostración: Supongamos como **hipótesis de partida que $f(x)$ no está acotada en el intervalo cerrado** $[a, b]$, donde además es continua.

Dividamos el intervalo cerrado $[a, b]$ en dos partes iguales: $[a, \frac{a+b}{2}]$ y $[\frac{a+b}{2}, b]$. Al menos uno de estos dos intervalos no debe estar acotado, porque si los dos estuvieran acotados también lo estaría el intervalo de partida $[a, b]$, y la hipótesis de partida sería falsa e implicaría que el teorema ya estaría demostrado.

Si tomamos el intervalo que no está acotado, que llamaremos $[a_1, b_1]$, y lo volvemos a dividir en dos partes iguales, podemos repetir el mismo razonamiento anterior: al menos una de las dos mitades no debe estar acotada, para no contradecir la hipótesis de partida. Y el nuevo intervalo no acotado será $[a_2, b_2]$.

Repitiendo este proceso de manera indefinida, obtenemos una sucesión de intervalos encajados, cuyas amplitudes van dividiéndose consecutivamente por un factor 2.

$$... \subset [a_n, b_n] \subset ... [a_3, b_3] \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a, b]$$

Por el postulado de Cantor esta sucesión de intervalos encajados converge a un único punto $\alpha \in [a, b]$.

Como $f(x)$ es continua en $\forall x \in [a, b]$ ==> $f(x)$ es continua en α ==> Existe el límite de $f(x)$ conforme x tiende al valor α y este límite coincide con el valor $f(\alpha)$ de la función. Es decir:

$f(x)$ es continua en α <==> $\exists \delta > 0, \varepsilon > 0 / |x - \alpha| < \delta \rightarrow |f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$

Como ya sabemos, los valores δ y ε son valores reales positivos, arbitrariamente tan pequeños como queramos. Por lo tanto, existe un entorno alrededor de α donde la función $f(x)$ está acotada:

$$|f(x)-f(\alpha)|<\varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad -\varepsilon<f(x)-f(\alpha)<\varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad f(\alpha)-\varepsilon<f(x)<f(\alpha)+\varepsilon$$

Finalmente llegamos a una inevitable contradicción. Por una parte hemos obtenido el valor α como secuencia indefinida de intervalos no acotados. Y por otra parte, al ser $f(x)$ continua, existen intervalos alrededor de α pertenecientes al entorno $|x-\alpha|<\delta$ donde la función sí está acotada.

Esta contradicción nos hace afirmar que la hipótesis de partida es falsa. Por lo tanto $f(x)$ **sí está acotada en el intervalo cerrado** $[a,b]$.

Teorema de Bolzano-Weierstrass

A la menor de las cotas superiores de un intervalo de valores se llama supremo. Y si el supremo pertenece al intervalo, hablamos de máximo.

A la mayor de las cotas inferiores de un intervalo de valores se llama ínfimo. Y si el ínfimo pertenece al intervalo, hablamos de mínimo.

Con la ayuda de estos conceptos podemos definir el teorema de Bolzano-Weierstrass.

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ ==> $f(x)$ admite un máximo y un mínimo dentro del intervalo.

Demostración: Vamos a demostrar la existencia de máximo (la demostración para el mínimo se realiza de manera análoga, cambiando el concepto de supremo por ínfimo, de máximo por mínimo, y el sentido de las desigualdades siguientes).

Por el teorema de acotación sabemos que $f(x)$ está acotada en el intervalo $[a,b]$. Definamos k como el supremo de los valores que toma la función en el intervalo. Es decir:

$$k \geq f(x), \forall x \in [a,b]$$

Si k pertenece al conjunto de valores formado por $\{f(x)\}, \forall x \in [a,b]$, sería el valor máximo y esta primera parte de la demostración ya estaría terminada.

Supongamos como **hipótesis de partida que** $k \notin \{f(x)\}, \forall x \in [a,b]$ **y por lo tanto no es un máximo**. Definamos la siguiente función auxiliar:

$$g(x) = \frac{1}{k - f(x)}$$

Esta función es continua en $[a,b]$ porque $f(x)$ es continua en el intervalo y porque el denominador nunca se anula, ya que hemos supuesto que $k \notin \{f(x)\}, \forall x \in [a,b]$.

Como $g(x)$ es continua, estará acotada superiormente en $[a,b]$. Sea h una cota superior positiva de $g(x)$. Es decir:

$$g(x) = \frac{1}{k - f(x)} \leq h \quad ==> \quad \frac{1}{h} \leq k - f(x) \quad ==> \quad f(x) \leq k - \frac{1}{h} \quad , \quad \forall x \in [a,b]$$

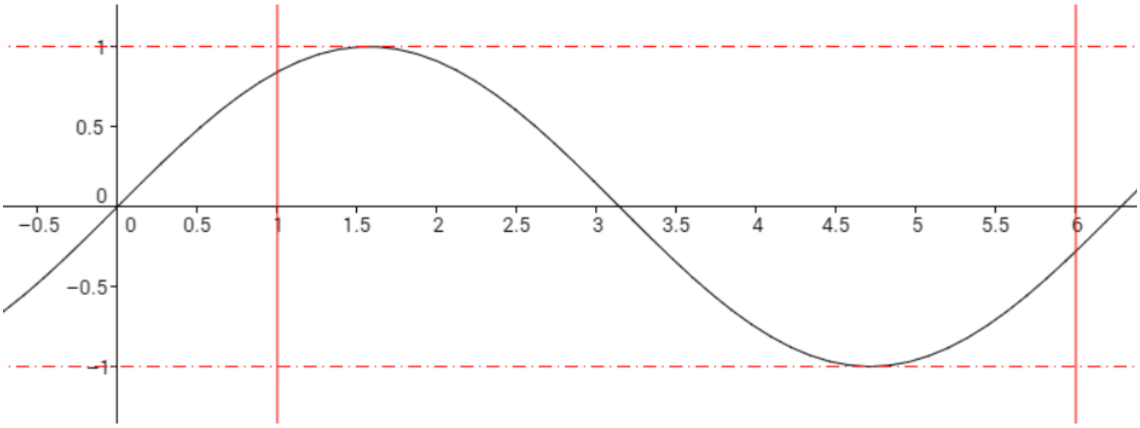
Obtenemos que $f(x)$ tiene un cota superior $k-\frac{1}{h}$ más pequeña que su supremo k , lo cual es un absurdo ya que la menor de todas las cotas superiores es el propio supremo.

Por lo tanto, nuestra **hipótesis de partida es falsa, por lo que** $k\in\{f(x)\},\forall x\in[a,b]$ **y es el máximo de la función en el intervalo** $[a,b]$.

De manera análoga se demuestra que el ínfimo $m\geq f(x),\forall x\in[a,b]$ también pertenece al conjunto de valores de $f(x)$ y es su mínimo.

Geométricamente este teorema establece que la gráfica de una función continua en un intervalo cerrado se encuentra comprendida entre dos líneas paralelas al eje de abscisas, que cortan respectivamente a la función en su valor máximo y en su valor mínimo.

-------- $f(x)$ *arbitraria, continua y acotada en el intervalo* $[1,6]$



Teorema de Bolzano

Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $f(a)\cdot f(b)<0$ ==> $f(x)$ posee solución: $\exists c\in(a,b)/f(c)=0$.

Demostración: Supongamos como **hipótesis de partida que** $f(x)$ **no posee solución en el intervalo cerrado** $[a,b]$, donde además es continua y cambia de signo en los extremos del intervalo.

Dividamos el intervalo cerrado $[a,b]$ en dos partes iguales: $[a,\frac{a+b}{2}]$ y $[\frac{a+b}{2},b]$, donde c será el punto medio: $c=\frac{a+b}{2}$.

Si $f(c)=0$ se cumpliría el teorema y la demostración terminaría.

Si $f(c)\neq 0$, entonces la función tomará valores de distinto signo o bien en $[a,\frac{a+b}{2}]$ o bien en $[\frac{a+b}{2},b]$. Si tomamos el intervalo donde la función cambia de signo en sus extremos, y lo volvemos a dividir en dos, podemos repetir el razonamiento anterior.

Procediendo así de manera sucesiva, obtendremos una secuencia de intervalos encajados en la que todos satisfacen que en sus extremos la función cambia de signo y cuyas amplitudes (por el postulado de Cantor) convergen a un único punto $\alpha\in[a,b]$.

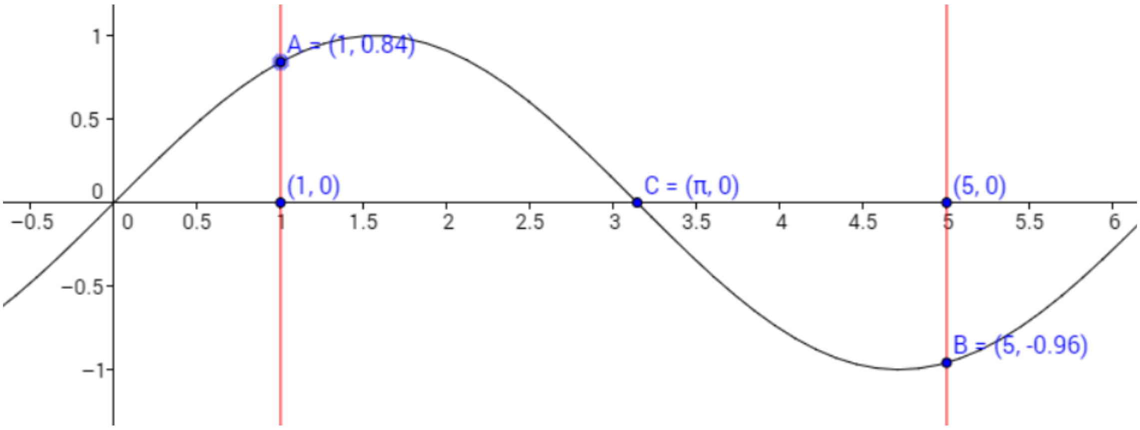
Si este valor $\alpha\in[a,b]$ cumple $f(\alpha)\neq 0$, como la función es continua en todo el intervalo y, en consecuencia, continua en α , existirá un entorno alrededor de α donde todos los puntos del entorno poseen el mismo signo que $f(\alpha)$.

Por lo que llegamos a una contradicción. Por un lado el punto α lo hemos obtenido como intersección de sucesivos intervalos donde la función cambia de signo en sus extremos. Y por otro lado, por continuidad, existe un entorno alrededor de α que contiene intervalos donde la función no cambia de signo.

En consecuencia, **la hipótesis de partida es falsa y** $f(x)$ **sí posee solución en el intervalo abierto** (a,b) **==>** $\exists c\in(a,b)/f(c)=0$.

La interpretación geométrica del teorema afirma que, si se cumplen las condiciones del teorema, la gráfica de $f(x)$ corta al eje de abscisas al menos en el punto $(c,0)$ comprendido entre los puntos $(a,0)$ y $(b,0)$.

-------- $f(x)$ *arbitraria, corta al eje horizontal en un punto perteneciente al intervalo* $(1,5)$



Teorema de los valores intermedios

Teorema de los valores intermedios

Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ ==> $f(x)$ toma cualquier valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$.

Demostración: Si $f(a)=f(b)$ el único valor comprendido entre los extremos de la función es el propio $f(a)=f(b)$, por lo que el teorema estaría demostrado.

Si $f(a)<f(b)$ consideramos un valor c de la función que cumpla $f(a)<c<f(b)$.

Ojo, el valor c es un valor de la función $f(x)$, es decir, del eje vertical; no es un valor de la variable x del eje horizontal. **No nos liemos con la nomenclatura**.

Definamos la función auxiliar $g(x)=f(x)-c$, que será continua en $[a,b]$ ya que lo es la función $f(x)$.

Si evaluamos la función auxiliar en los extremos del intervalo, comprobamos que cumplimos las condiciones para aplicar el teorema de Bolzano:

$$g(a)=f(a)-c<0$$
$$g(b)=f(b)-c>0$$

Por el teorema de Bolzano sabemos que existe un valor $\phi\in(a,b)/g(\phi)=0$. Sustituyendo esta consecuencia en la función $g(x)$:

$$g(\phi)=f(\phi)-c=0 \quad ==> \quad f(\phi)=c$$

Como c es un valor arbitrario de la función comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, hemos demostrado que siempre existe un valor del intervalo (a,b) asociado a ese valor c de la función, tal y como queríamos demostrar.

Si $f(a)>f(b)$ la demostración es totalmente análoga, usando la misma función auxiliar.

La interpretación geométrica nos dice que todo valor intermedio entre $f(a)$ y $f(b)$ tiene asociado un punto del intervalo (a,b) .

-------- $f(x)$ *arbitraria, continua en* $[a, b]$, *toma cualquier valor del intervalo* $[f(a), f(b)]$