Teoría – Tema 2

Concepto de función

Índice de contenido

Función, dominio e imagen

Una función real $f(x)$ de variable real x en un intervalo $I \in \mathbb{R}$ es una regla que asigna a cada valor $x \in I$ un único número real $f(x) \in C$.

$$f: I \rightarrow C$$

Si obtenemos todos los pares de valores $(x, f(x))$ obtenemos la gráfica de la función.

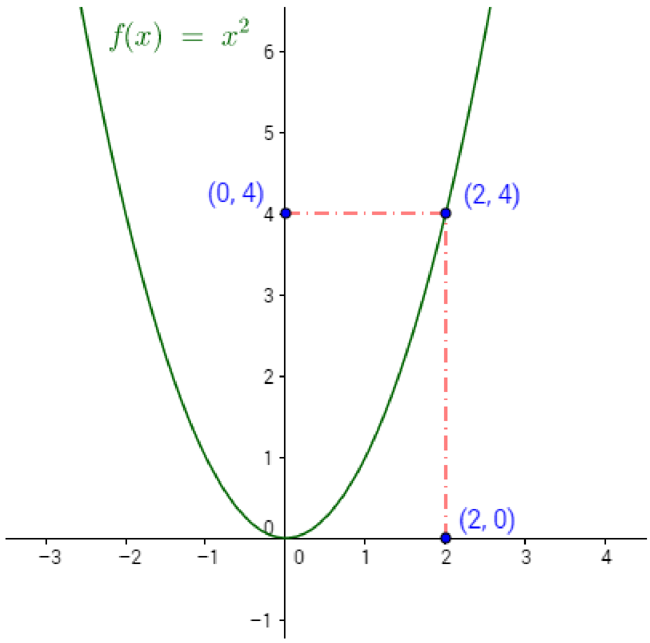
El **dominio** de la función $D(f)$ es el conjunto $I \in \mathbb{R}$ de todos los puntos a los que puedo aplicar la función.

Para cada x obtenemos un único valor $f(x)$, llamado imagen del valor real x . El conjunto formado por todas las imágenes de todos los puntos del dominio $D(f)$ es la imagen de la función $f(x)$.

La **imagen** de una función también se denomina **recorrido** o **codominio**. La imagen depende del conjunto de valores sobre los que aplicamos inicialmente la función.

$f(x)=x^2: \mathbb{R} \rightarrow$ [0, +∞) → Dominio: todos los reales. Imagen: reales positivos más el cero

$f(x)=x^2:[0,2] \rightarrow [0,4]$ → Dominio: $[0,2]$. Imagen: $[0,4]$



Es decir, además de conocer la forma explícita de una función $f(x)$ debemos conocer el intervalo sobre el que se aplica para saber cuál será su correspondiente imagen.

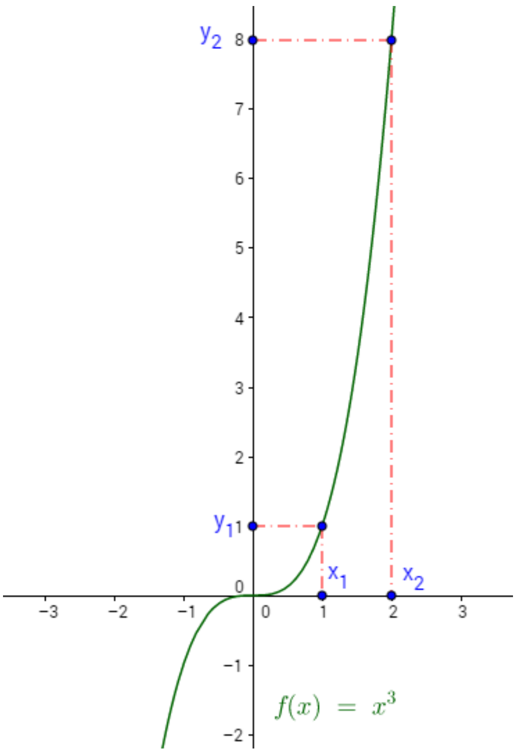
A dominios distintos, tendremos imágenes distintas. Si no nos especifican el dominio de la función, supondremos que éste es el mayor dominio posible (en el ejemplo anterior, $f(x)=x^2$ tiene como mayor dominio posible $\mathbb{R}$).

La imagen generada por el mayor dominio posible de la función se llama **imagen maximal**, o recorrido maximal, o codominio maximal (en el ejemplo anterior, $f(x)=x^2$ tiene como codominio maximal todos los reales positivos más el cero).

Función inyectiva

Una función real $f(x)$ de variable real x en un intervalo $I \in \mathbb{R}$ es inyectiva si para toda pareja de valores $x_1 \in I$ y $x_2 \in I$ siempre tenemos imágenes distintas, es decir, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

$f(x)=x^3$ *es inyectiva en cualquier intervalo* $I \subset \mathbb{R}$

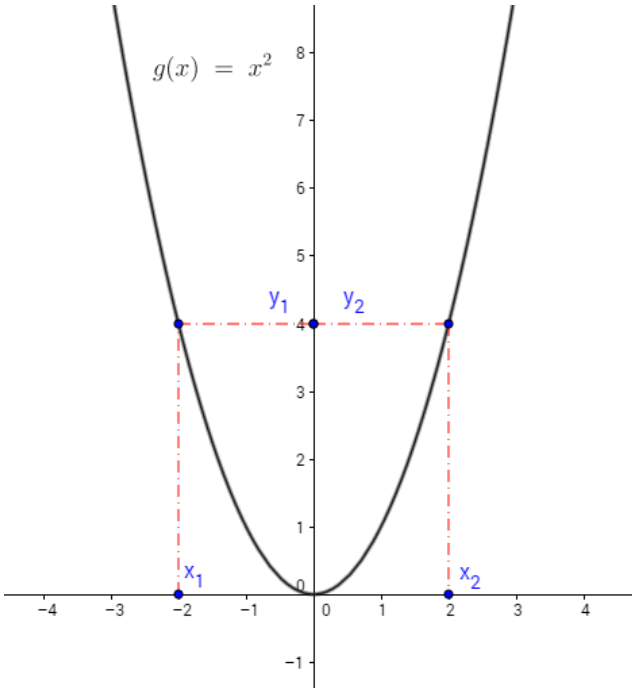


Ser inyectiva es una propiedad de los valores del dominio de la función. Vamos a reflexionar un poco más sobre este detalle.

Puede ocurrir que una función sea inyectiva en un intervalo y no en otro. Por ejemplo, $f(x)=x^2$ es inyectiva en el intervalo $(0,+\infty)$, pero no es inyectiva si consideramos como intervalo toda la recta real (ya que un valor de la imagen $f(x)$ puede tener asociado más de un valor real x del dominio).

Gráficamente podemos afirmar que una función es inyectiva si cualquier recta horizontal que podamos trazar corta, como máximo, una única vez a la función.

$g(x)=x^2$ *es inyectiva en* $I=(0,\infty)$ *pero no en* $I=\mathbb{R}$



¿Cómo podemos demostrar analíticamente que una función es inyectiva? Por reducción al absurdo.

Partimos de dos valores del dominio $x_1 \neq x_2$ y suponemos que las imágenes son iguales, es decir, suponemos que $f(x_1)=f(x_2)$. Si al aplicar esta igualdad llegamos a un absurdo, diremos que la hipótesis de partida es falsa y las imágenes serán distintas, por lo que la función es inyectiva.

Ejemplo

Demostrar analíticamente que $f(x)=x+3$ es inyectiva para $x\in\mathbb{R}$.

Partimos de dos valores arbitrarios $x_1 \neq x_2$ y suponemos $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1+3=x_2+3$ $\rightarrow$ $x_1=x_2$ $\rightarrow$ Esto es un absurdo porque hemos partido de $x_1 \neq x_2$ $\rightarrow$ Absurdo matemático $\rightarrow$ La hipótesis de partida es falsa $\rightarrow$ $f(x_1)\neq f(x_2)$ $\rightarrow$ La función es inyectiva para $x\in\mathbb{R}$.

Función sobreyectiva

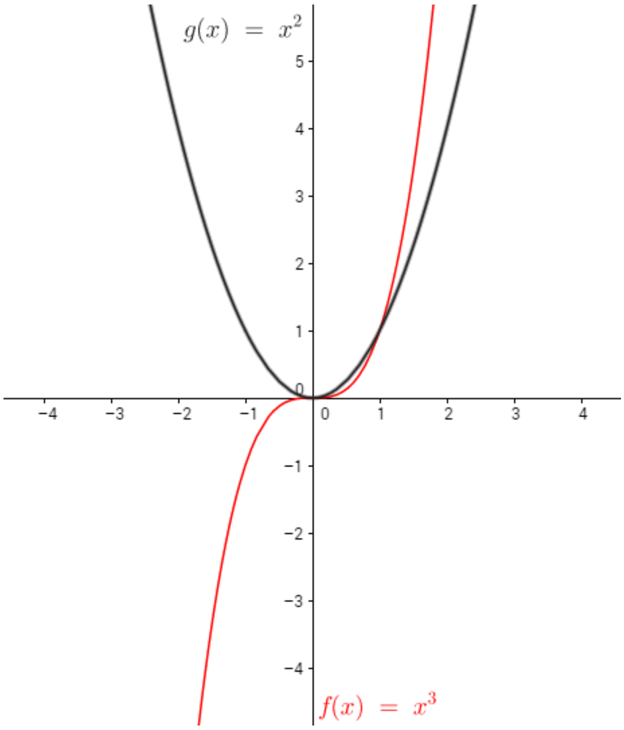
Una función real $f(x): I \to C$ de variable real x es sobreyectiva si para cual valor de la imagen $y \in C$ siempre existe un valor del dominio asociado a ese valor de la imagen, es decir, $\exists x \in I / f(x) = y$.

Ser sobreyectiva es una propiedad de los valores de la imagen de la función. De esta forma, una función pueder ser sobreyectiva en un codominio y no serlo en otro codominio.

$f(x)=x^3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es sobreyectiva en el codominio* $\mathbb{R}$

$g(x)=x^2: \mathbb{R} \to (0,\infty)$ *es sobreyectiva en el codominio* $(0,\infty)$

$g(x)=x^2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *no es sobreyectiva en el codominio* $\mathbb{R}$



¿Como demostrar analíticamente que una función es sobreyectiva? Recordando el concepto de imagen maximal, como la imagen generada por el mayor dominio posible de la función.

Una función será sobreyectiva si su imagen es un subconjunto de esa imagen maximal. Por ejemplo, $g(x)=x^2: \mathbb{R} \to [0,3]$ es sobreyectiva porque su imagen maximal es [0, +∞) y se cumple $[0,3] \subset$ [0, +∞).

Función biyectiva

Una función $f(x)$ es biyectiva si es, a la vez, inyectiva y sobreyectiva.

Ser biyectiva garantiza la existencia de función inversa $f^{-1}(x)$, que satisface la relación:

$$(f\circ f^{-1})(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=x$$

La imagen de $f(x)$ se convierte en el dominio de la función inversa $f^{-1}(x)$.

Ejemplo

Obtener, si es posible, la función inversa de $y=2x-3$.

La función $f(x)=2x-3:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ es biyectiva, por ser a su vez inyectiva y sobreyectiva.

Es inyectiva porque cualquier recta horizontal corta, como máximo, una única vez a la recta oblicua $y=2x-3$.

Y es sobreyectiva porque el codominio maximal de la función son todos los reales.

Por lo tanto la función es biyectiva y admite función inversa. Para obtenerla damos los siguientes pasos:

Despejamos la variable x $\rightarrow$ $x=\frac{y+3}{2}$.

Intercambiamos la notación de las variables $\rightarrow$ $y=\frac{x+3}{2}$.

La función inversa resulta $f^{-1}(x)=\frac{x+3}{2}$. Comprobamos que cumple las siguientes condiciones:

$$(f\circ f^{-1})(x)=x \rightarrow f\left(\frac{x+3}{2}\right)=2\cdot\frac{x+3}{2}-3=x+3-3=x$$

$$(f^{-1}\circ f)(x)=x \rightarrow f^{-1}(2x-3)=\frac{(2x-3)+3}{2}=\frac{2x}{2}=x$$