Problemas – Tema 2

Solución a problemas de Límite y Continuidad - Hoja 05 - Problemas 2, 3, 4, 5

Hoja 5. Problema 2

Resuelto por Alberto Jiménez Molina (noviembre 2014)

2. Analiza la continuidad de la función en $x=0$ **.**

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2^x-1}{x} & si \quad x<0 \\ \dfrac{\cos(x)}{x^2+1} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Continuidad

$$\exists f(x=0) \quad \rightarrow \quad f(x=0)=\frac{\cos(0)}{0^2+1}=1$$

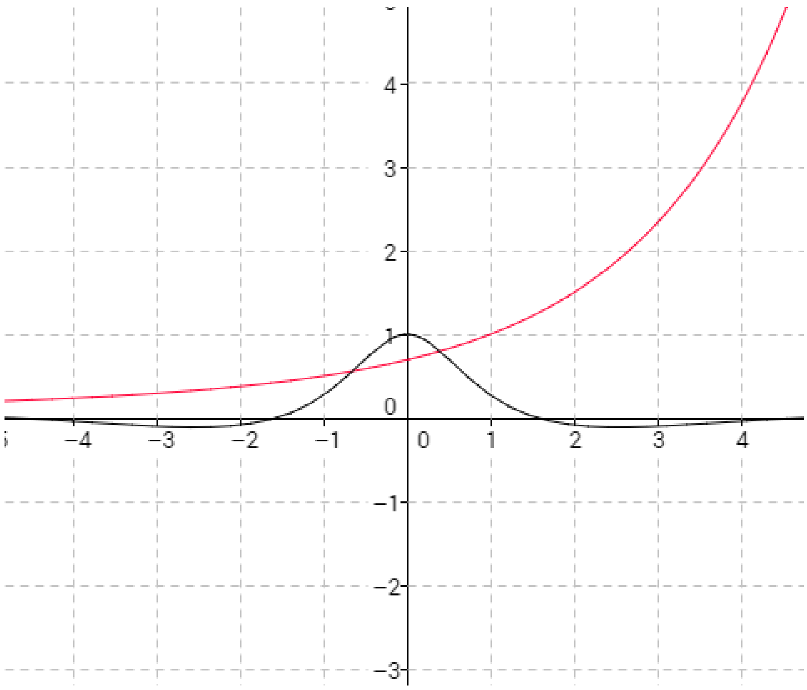
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2^x-1}{x}=\frac{0}{0}\to L'Hopital \to \lim_{x\to 0^-} 2^x\cdot\ln(2)=ln2\simeq 0{,}69$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{x^2+1}=\frac{1}{1}=1$$

$$1\neq\ln(2)$$

Estamos ante una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito, por existir los límites laterales, ser finitos pero no coincidir.

Gráficamente podemos apreciar este salto representando por separado la función de cada intervalo. La función en rojo es válida para valores $x<0$. La función en negro es válida para valores $x\geq 0$.



Hoja 5. Problema 3

Resuelto por José Carlos Rodríguez Rodríguez (noviembre 2014)

3. Determinar k para que la función sea continua en $x=0$.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1-e^x}{2x+1-e^{2x}} & si \quad x<0 \\ (2x-k)^2 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Estudio la continuidad en el punto frontera $x=0$.

$\exists \; f(x_0)=f(0)=(-k)^2=k^2$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{x+1-e^x}{2x+1-e^{2x}}\right)=\dfrac{0}{0}$ → indeterminación

Aplicamos L'Hôpital → $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1-e^x}{2-2e^{2x}}\right)=\dfrac{0}{0}$ → indeterminación

Aplicamos L'Hôpital → $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{-e^x}{-4e^{2x}}\right)=\dfrac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}(2x-k)^2=k^2$

Para que la función sea continua en $x=0$, los límites laterales deben ser iguales. Por lo tanto:

$k^2=\dfrac{1}{4} \quad \rightarrow \quad k=\dfrac{\pm 1}{2}$

Hoja 5. Problema 4

Resuelto por Carlos de Martín (octubre 2014)

4. Determinar a y b para que la función sea continua en toda la recta real.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & si \quad x<0 \\ a\,x+b & si \quad 0\le x\le 2 \\ x^3-1 & si \quad x>2 \end{cases}$$

Lo primero es estudiar la continuidad en los intervalos abiertos.

$x<0$ → $f(x)=x^2+3$ → es continua en $x<0$ por ser polinómica
$0<x<2$ → $f(x)=a\,x+b$ → es continua en $0<x<2$ por ser polinómica
$x>2$ → $f(x)=x^3-1$ → continua en $x>2$ por ser polinómica

Analizamos la continuidad en los puntos frontera de los intervalos.

Para $x=0$:

$$f(0)=a\cdot 0+b=b$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0-} x^2+3=3 \\ \lim_{x\to 0+} ax+b=b \end{cases} \rightarrow \quad b=3$$

Para $x=2$:

$$f(2)=2a+3=2\mathrm{a}+3$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 2-} a\,x+b\to 2\mathrm{a}+3 \\ \lim_{x\to 2+} x^3-1\to 8-1=7 \end{cases} \rightarrow \quad 2a+3=7 \quad \rightarrow \quad a=2$$

Por lo tanto para $a=2$ y $b=3$, tendremos $f(x)$ continua en toda la recta real.

Hoja 5. Problema 5

Resuelto por Pablo Martínez Peregrina (octubre 2014)

5. Demuestre que la función $f(x)=2+2x-e^x$ corta al eje OX en el intervalo $(-1,1)$ y tiene un máximo relativo en ese mismo intervalo.

La función es continua en el intervalo de estudio (-1, 1) por ser suma de funciones continuas en todo $\mathbb{R}$.

Además tiene distinto signo en los extremos del intervalo. Por tanto, por el teorema de Bolzano, cortará al eje OX al menos un un punto contenido en (−1, 1).

$$f(-1)=2-2-e^{-1}<0$$

$$f(1)=2+2-e^{1}>0$$

Entonces, existirá un punto $c\in(-1,1)$ tal que $f(c)=0$. En ese punto, la función corta al eje OX .

Para ver que tiene un máximo en ese intervalo hallamos la derivada primera y la igualamos a cero.

$$f'(x)=2-e^x=0 \rightarrow 2=e^x \rightarrow x=ln2\simeq 0{,}6931\in(-1,1) \rightarrow \text{punto crítico}$$

Y con la segunda derivada confirmamos que estamos ante un extremo relativo.

$$f''(x)=-e^x \rightarrow f''(ln2)=-e^{ln2}=-2<0 \rightarrow \text{máximo en } (ln2,\ 2\cdot ln2)$$