Problemas – Tema 2

Solución a problemas de Límite y Continuidad - Hoja 04 - Problemas 2, 3, 4, 5, 6

Hoja 4. Problema 2

Resuelto por Vicky Torrecillas (noviembre 2014)

2. Determinar a para que el límite sea igual a 1 .

$$\lim_{x\to\infty} 2x-\sqrt{4x^2+ax+1}=\infty-\infty$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado para eliminar la indeterminación.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(2x-\sqrt{4x^2+ax+1}\right)\cdot\left(2x+\sqrt{4x^2+ax+1}\right)}{\left(2x+\sqrt{4x^2+ax+1}\right)}\right)\rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-\left(4x^2+ax+1\right)}{2\mathrm{x}+\sqrt{4x^2+ax+1}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-ax-1}{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}}=\frac{\infty}{\infty}$$

Que podemos resolver dividiendo por la máxima potencia de x , o bien por L'Hôpital (derivando numerado y denominador por separado).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-a\cdot\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}{2\cdot\frac{x}{x}+\sqrt{4\cdot\frac{x^2}{x^2}+a\cdot\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-a-\frac{1}{x}}{2+\sqrt{4+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{-a}{4}$$

Si el límite debe ser igual a 1 → $\frac{-a}{4}=1 \rightarrow a=-4$

Hoja 4. Problema 3

Resuelto por Pedro Macías (noviembre 2014)

3. Calcula $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-8}{2^{n+1}}\right)$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-8}{2^{n+1}}\right)=\frac{\infty}{\infty}$ → indeterminación → dividimos numerador y denominador por 2^{n+1}

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2^n}{2^{n+1}}-\frac{8}{2^{n+1}}}{\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}}}\right) \rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}-\frac{8}{2^{n+1}}}{1}\right)=\frac{1}{2}$$

Hoja 4. Problema 4

Resuelto por María Moreno Lemos (octubre 2014)

4. Sea $f(x)=\frac{bx}{x-a}$ **. Calcula** a **y** b **para que la función tenga asíntota vertical en** $x=2$ **y asíntota horizontal en** $y=3$ **.**

De la definición de asíntota vertical → $\lim_{x\to 2} \frac{b\cdot x}{x-a}=\infty$

Sustituyo $x=2$ para evaluar la función.

$f(2)=\frac{2b}{2-a}$ → diverge a infinito si el denominador se hace 0 → $a=2$

De la definición de asíntota horizontal → $\lim_{x\to\infty} f(x)= k,\ \ k\in\mathbb{R}$

Si $k=3$, tendremos asíntota horizontal en $y=3$ → $\lim_{x\to\infty} \frac{bx}{x-2}=3$

Al tener cociente de polinomios de igual grado, el límite en el infinito es el cociente de los coeficientes que acompañan a los términos de mayor grado → $b=3$.

Hoja 4. Problema 5

Resuelto por Elena Galán (noviembre 2014)

5. Estudia las asíntotas de $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$ **y pinta la gráfica.**

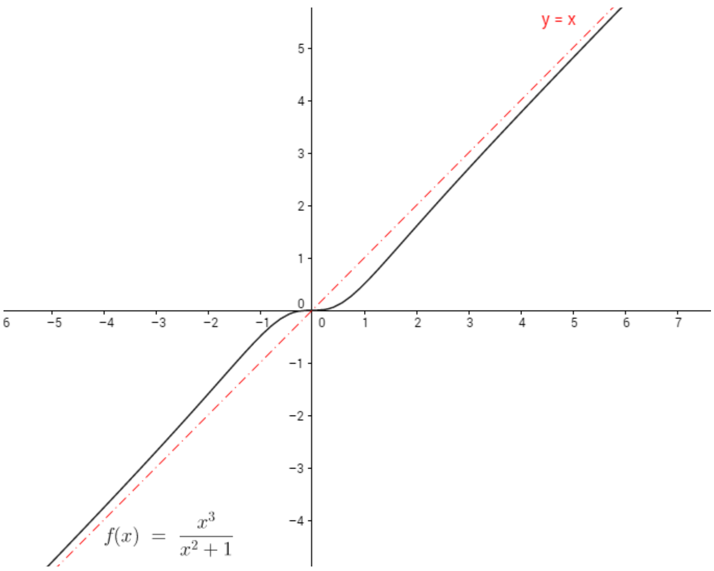
$Dom(f)=\mathbb{R}$, ya que el denominador nunca se anula. Por lo tanto, no existen asíntotas verticales. Las asíntotas horizontales las estudiamos con el límite en el infinito de la función. Al ser un coeficiente entre polinomios, con el grado del numerador más grande que en el denominador, tendremos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

Por lo tanto tampoco tenemos asíntota horizontal. Estudiamos las asíntotas oblicuas.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3+x}=1$$ → Cociente de polinomios del mismo grado

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3-x}{x^2+1}=0$$ → Tenemos asíntota oblícua en $y=x$



Hoja 4. Problema 6

Resuelto por María Olivares (noviembre 2014)

6. Calcula

a) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{4^x+5^x}{3^x+6^x}\right)$

b) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{4^x+5^x}{3^x+6^x}\right)$

a) Evaluamos el límite para $x=0$ y nos queda:

$$\lim_{x\to 0} \frac{4^0+5^0}{3^0+6^0} = \lim_{x\to 0} \frac{1+1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

b) Evaluamos el límite para x tendiendo a infinito y nos queda una indeterminación:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4^\infty+5^\infty}{3^\infty+6^\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

Para resolverla, dividimos cada término por la potencia de mayor base.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\frac{4^x}{6^x}+\frac{5^x}{6^x}}{\frac{3^x}{6^x}+\frac{6^x}{6^x}}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\left(\frac{4}{6}\right)^x+\left(\frac{5}{6}\right)^x}{\left(\frac{3}{6}\right)^x+1}\right)$$

Cualquier potencia de base positiva menor que 1, en el infinito, tiende a 0. Por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\left(\frac{4}{6}\right)^x+\left(\frac{5}{6}\right)^x}{\left(\frac{3}{6}\right)^x+1}\right) = \frac{0+0}{0+1} = 0$$