Problemas – Tema 2

Solución a problemas de Límite y Continuidad - Hoja 21 - Todos resueltos

Hoja 21. Problema 1

1. a) Demostrar que la función $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ **definida en el dominio [** $1,\infty$ **) admite inversa.**

b) Obtener la función inversa $f^{-1}(x)$ **y comprobar que se cumplen las igualdades:** $(f\circ f^{-1})(x)=x$ **y** $(f^{-1}\circ f)(x)=x$ **.**

1) Esbozo de la función en el dominio [$1,\infty$) → Corte al eje $OX \rightarrow x=1 \rightarrow (1,0)$

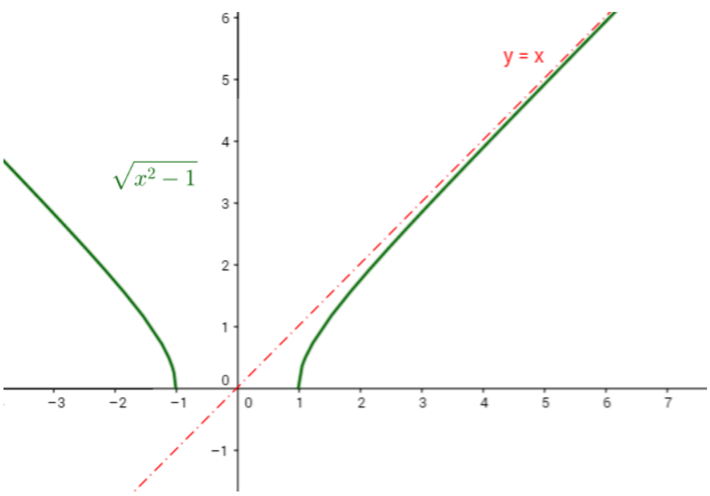
Asíntota oblicua → $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=1 \rightarrow m=1$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-1}-x=\infty-\infty \rightarrow \frac{\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$$

La asíntota oblicua es → $y=x$

$$f(x)=\sqrt{x^2-1} \rightarrow f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow x=0\notin Dom(f)$$

Evaluamos la primera derivada en un punto cualquiera del dominio, a la derecha de $x=1 \rightarrow f'(10)>0$ → La función es estrictamente creciente.



En el dominio $[1,\infty)$ la función es inyectiva, ya que cualquier recta horizontal corta como máximo en un punto a la gráfica (valores distintos del dominio tienen asociados valores distintos de la imagen).

Para el dominio maximal $[1,\infty)$ se tiene un codominio maximal $[0,\infty)$, por lo tanto la función es sobreyectiva (cualquier valor de la imagen del codominio tiene asociado al menos un punto del dominio).

Por lo tanto, la función es biyectiva y admite inversa.

b) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

$$y=\sqrt{x^2-1} \rightarrow y^2=x^2-1 \rightarrow y^2+1=x^2 \rightarrow \sqrt{y^2+1}=x$$

$$y=\sqrt{x^2+1} \rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x^2+1}$$

$$(f\circ f^{-1})(x)=f(\sqrt{x^2+1})=\sqrt{(\sqrt{x^2-1})^2+1}=\sqrt{x^2}=x$$

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(\sqrt{x^2-1})=\sqrt{(\sqrt{x^2+1})^2-1}=\sqrt{x^2}=x$$

Hoja 21. Problema 2

2. a) Determinar k para que la función sea continua en $x=0$.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1-e^x}{2x+1-e^{2x}} & si \quad x<0 \\ (2x-k)^2 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

b) Indica un dominio que permita que la función $f(x)=\cos(x)$ admita inversa. Demuestra que, en ese dominio que propones, la función es biyectiva.

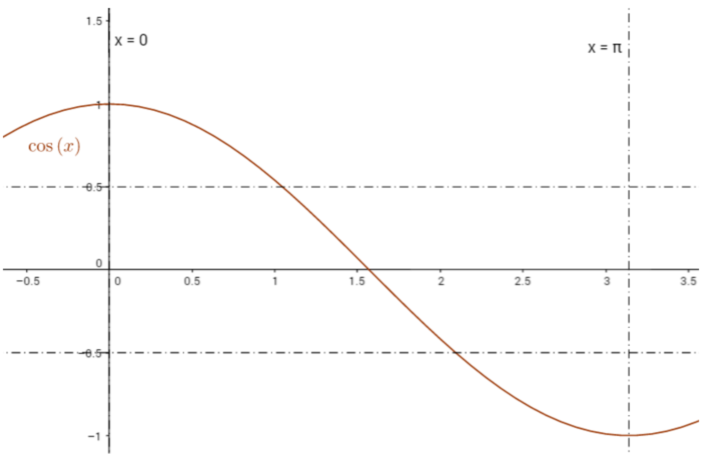
a) $f(0)=k^2$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1-e^x}{2x+1-e^{2x}}=\frac{0}{0} \rightarrow \text{L'Hôpital} \rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{1-e^x}{2-2e^{2x}}=\frac{0}{0} \rightarrow \text{L'Hôpital} \rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{-e^x}{-4e^{2x}}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(2x-k)^2=k^2$$

Igualamos límites laterales $\rightarrow$ $k^2=\dfrac{1}{4}$ $\rightarrow$ $k=\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\pm\dfrac{1}{2}$

b) La gráfica de la función $f(x)=\cos(x)$ no admite inversa en su dominio maximal $\mathbb{R}$ por no ser inyectiva. Pero si elegimos el dominio $[0,\pi]$ sí es inyectiva, ya que en ese dominio cualquier recta horizontal corta a la gráfica, como máximo, una sola vez.



El dominio $[0,\pi]$ genera, a su vez, el codominio maximal de la función coseno $\rightarrow$ $[-1,1]$ $\rightarrow$ por lo tanto la función es sobreyectiva.

Siendo inyectiva y sobreyectiva, la función es biyectiva y admite inversa en el dominio $[0,\pi]$.

Hoja 21. Problema 3

3. a) Utiliza el Teorema de Bolzano para encontrar, con precisión de una cifra decimal, el punto de corte de las funciones $f(x)=3x^5-10x^4+10x^3+3$ y $g(x)=e^x$ en el intervalo $[-1,0]$.

b) Demostrar que la función $g(x)=e^x$ es biyectiva.

a) El punto de corte de ambas gráficas implica → $f(x)=g(x)$ → $f(x)-g(x)=0$

Es decir → $3x^5-10x^4+10x^3+3-e^x=0$

Sobre esta ecuación vamos a aplicar Bolzano, tomando como función:

$h(x)=3x^5-10x^4+10x^3+3-e^x=0$

$h(-1)<0$, $h(0)>0$ → $\exists c\in[-1,0]/h(c)=0$

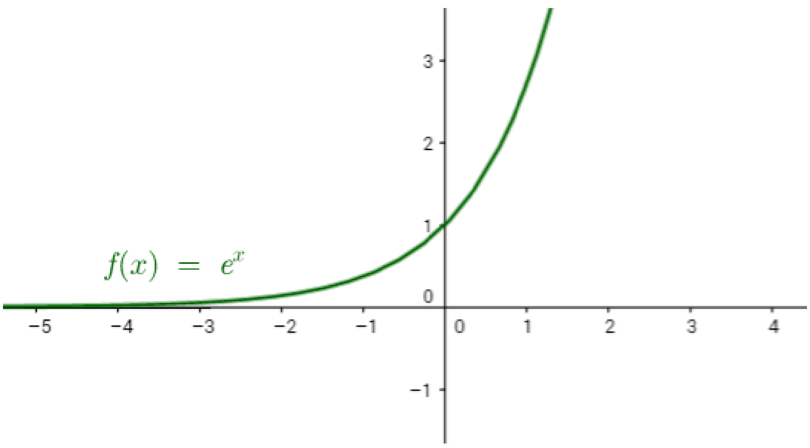
$h(-0{,}5)>0$ → probamos en $[-1,\ -0{,}5]$

$h(-0{,}7)<0$ → probamos en $[-0{,}7,\ -0{,}5]$

$h(-0{,}6)<0$ → probamos en $[-0{,}6,\ -0{,}5]$

La solución, con precisión de una cifra decimal, es $x\simeq-0{,}5$.

b) Como no nos fijan un dominio, asumimos el dominio maximal $\mathbb{R}$ que genera el codominio maximal $(0,+\infty)$.



A partir de la gráfica de la exponencial es fácil razonar que es inyectiva (rectas horizontales cortan a la gráfica, como máximo, una sola vez) y que es sobreyectiva (el dominio maximal $\mathbb{R}$ genera el codominio maximal $(0,+\infty)$).

Al ser inyectiva y sobreyectiva, es biyectiva.

Hoja 21. Problema 4

4. Sea $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ una función definida en el dominio [$1,\infty$). Su inversa es $f^{-1}(x)=\sqrt{x^2+1}$. Esboza gráficamente ambas funciones y comprueba, geométricamente, que ambas gráficas son simétricas respecto a la recta $y=x$.

Estudiamos $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ en el dominio [$1,\infty$).

Corte al eje $OX \rightarrow x=1 \rightarrow (1,0)$

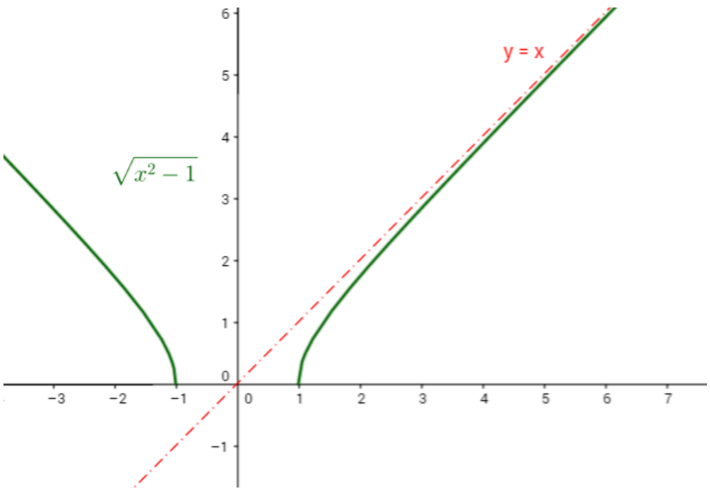
Asíntota oblicua → $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=1 \rightarrow m=1$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-1}-x=\infty-\infty \rightarrow \frac{\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$$

La asíntota oblicua es → $y=x$

$$f(x)=\sqrt{x^2-1} \rightarrow f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow x=0\notin Dom(f)$$

Evaluamos la primera derivada en un punto cualquiera del dominio, a la derecha de $x=1 \rightarrow f'(10)>0$ → La función es estrictamente creciente.



Estudiamos $f^{-1}(x)=\sqrt{x^2+1}$ → Dominio $\mathbb{R}$, ya que el discriminante nunca se anula.

Corte al eje $OY \rightarrow x=0 \rightarrow (0,1)$

Asíntota oblicua → $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=1 \rightarrow m=1$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\infty-\infty \rightarrow \frac{\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

La asíntota oblicua es → $y=x$

$f^{-1}(x)=\sqrt{x^2+1} \rightarrow (f^{-1})'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \rightarrow (f^{-1})'(x)=0 \rightarrow x=0$ → punto crítico

$(-\infty,0) \rightarrow (f^{-1})'(-10)<0 \rightarrow f^{-1}(x)\downarrow$ decreciente

$(0,\infty) \rightarrow (f^{-1})'(10)<0 \rightarrow f^{-1}(x)\uparrow$ creciente

Es decir, en $x=0$ tenemos un mínimo relativo → $(0,1)$ mínimo de $f^{-1}(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Si representamos ambas gráficas sobre los mismos, ejes comprobamos que son simétricas alrededor de la asíntota $y=x$ para el dominios el dominio [$1,\infty$) de la función de partida $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.