# Problemas – Tema 2

# Solución a problemas de Límite y Continuidad - Hoja 20 - Todos resueltos

## Hoja 20. Problema 1

**1. Sabiendo que** $\lim_{x \to 0} \frac{x\cos(2x)+b\,sen(x)}{4x^2}$ **es finito, calcula** $b$ **y el valor del límite.**

Evaluamos.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\cos(2x)+b\,sen(x)}{4x^2}=\frac{0}{0} \quad \rightarrow \text{Indeterminación} \rightarrow \text{Aplicamos L'Hôpital}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\cos(2x)+b\,sen(x)}{4x^2}=\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x)-x\,sen(2x)\cdot 2+b\cos(x)}{8x}=\frac{1-0+b}{0}=\frac{1+b}{0}$$

Para que el límite sea finito necesitamos anular el numerador, para evitar que diverja a infinito. Es decir:

$$1+b=0 \quad \rightarrow \quad b=-1$$

Si llevamos este resultado al límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x)-x\,sen(2x)\cdot 2-\cos(x)}{8x}=\frac{0}{0} \quad \rightarrow \text{Indeterminación} \rightarrow \text{Aplicamos L'Hôpital}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-sen(2x)\cdot 2-2[sen(2x)+x\cos(2x)\cdot 2]+sen(x)}{8}=\frac{0-2[0+0]+0}{8}=0$$

## Hoja 20. Problema 2

**2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x)=|x^2-2x|$ y $g(x)=\ln(x)$ .**

**a) Realiza un esbozo de ambas gráficas sobre los mismos ejes.**

**b) Utiliza el Teorema de Bolzano para encontrar, con precisión de una cifra decimal, el punto de corte de ambas gráficas en el intervalo $[2,3]$ .**

a) La forma más directa de representar $f(x)=|x^2-2x|$ es estudiar la parábola $h(x)=x^2-2x$ y pasar a valores positivos aquellos intervalos donde la función se haga negativa.

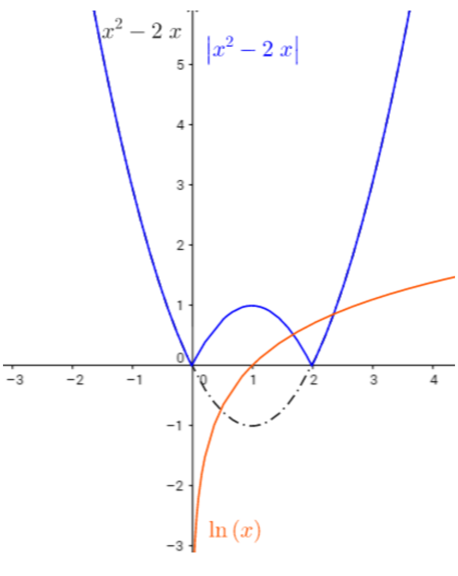
$h(x)=x^2-2x$ → Corte con eje $OX$ → $x^2-2x=0$ → $(0,0)$ , $(2,0)$

$h(x)=x^2-2x$ → $h'(x)=2x-2$ , $h'(x)=0$ → $2x-2=0$ → $x=1$

$h'(x)=2x-2$ → $h''(x)=2>0$ → $x=1$ es un mínimo relativo

El vértice de la parábola es el punto $(1,-1)$ , y será un mínimo relativo y absoluto de la parábola. Al estudiar la función valor absoluto $f(x)=|x^2-2x|$ tendremos un máximo relativo en $(1,-1)$ .

La función $g(x)=\ln(x)$ es estrictamente creciente en su dominio $(0,+\infty)$ y corta al eje $OX$ en $(1,0)$ . Posee una asíntota vertical en $x=0$ .



b) El Teorema de Bolzano afirma que si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, tal que $f(a)\cdot f(b)0$ , existe un valor $c\in(a,b)$ solución de la función. Es decir → $f(c)=0$ .

En nuestro caso particular, en el intervalo $[2,3]$ el punto de corte surge de igualar las funciones de la forma:

$$x^2-2x=\ln(x) \quad\rightarrow\quad x^2-2x-\ln(x)=0$$

La función $t(x)=x^2-2x-\ln(x)$ es continua en el intervalo $[2,3]$ , por ser suma y diferencia de funciones continuas en ese intervalo (polinomio y logaritmo).

$$f(2)=4-4-\ln(2)<0$$
$$f(3)=9-6-\ln(3)>0$$

La función cambia de signo en los extremos del intervalo $[2,3]$ , por lo que estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Bolzano → $\exists c\in[2,3]/t(c)=0$ .

Acotamos el intervalo.

$x=2{,}5 \rightarrow f(2{,}5)=(2{,}5)^2-5-\ln(2{,}5)>0$ → Tomamos el intervalo $[2,\ 2{,}5]$

$x=2{,}25 \rightarrow f(2{,}25)<0$ → Tomamos el intervalo $[2{,}25,\ 2{,}5]$

$x=2{,}375 \rightarrow f(2{,}375)<0$ → Tomamos el intervalo $[2{,}25,\ 2{,}375]$

$x=2{,}3 \rightarrow f(2{,}3)<0$ → Tomamos el intervalo $[2{,}3,\ 2{,}375]$

El punto de corte, con precisión de una cifra decimal, es $x\simeq 2{,}3$ .

# Hoja 20. Problema 3

**3. Calcula** $\lim_{x\to 1^+} (2-x)^{\frac{1}{1-x}}$ .

$\lim_{x\to 1^+} (2-x)^{\frac{1}{1-x}}$ → evaluamos → $1^{-\infty}=\frac{1}{1^{+\infty}}$ → indeterminación

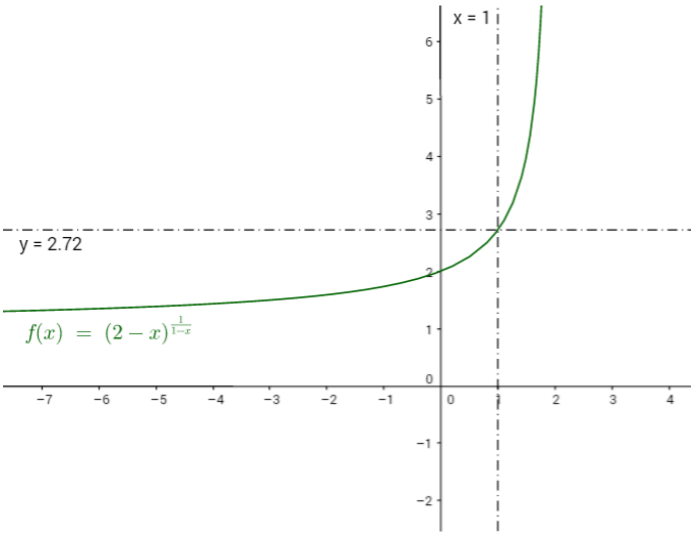
Para resolver aplicamos logaritmo al límite y, sobre el resultado que obtengamos, aplicamos exponencial (recuerda que logaritmo y exponencial son funciones inversas).

$\lim_{x\to 1^+} (2-x)^{\frac{1}{1-x}} \to \lim_{x\to 1^+} \ln[(2-x)^{\frac{1}{1-x}}]=\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x}\cdot\ln[(2-x)]=\frac{\ln(1)}{0}=\frac{0}{0}$ → indeterminación

Aplicamos L'Hôpital → $\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln[(2-x)]}{1-x}=\lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{-1}{2-x}}{-1}=1$

Aplicamos exponencial y obtenemos el valor del límite original → $\lim_{x\to 1^+} (2-x)^{\frac{1}{1-x}}=e^1=e$

La gráfica nos muestra la convergencia del límite hacia el número $e$ .



# Hoja 20. Problema 4

**4. Estudia la continuidad de** $f(x)=\begin{cases} a\cdot\dfrac{2^x-1}{x} & si \quad x<0 \\ \dfrac{\cos(x)}{x^2+1} & si \quad x\geq 0\end{cases}$ **en todo** $\mathbb{R}$ **y obtener el valor de** $a$ **para que la función sea continua en** $x=0$ **.**

En el intervalo abierto $(-\infty,0)$ la función $f(x)=a\cdot\dfrac{2^x-1}{x}$ es continua, ya que el valor $x=0$ que anula al denominador no pertenece al intervalo, y la función exponencial $2^x$ es continua en toda la recta real.

En el intervalo abierto $(0,+\infty)$ la función $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{x^2+1}$ es continua, ya que el denominador no se anula para ningún valor real y porque la función coseno es continua en toda la recta real.

En $x=0$ la función es continua si cumple las siguientes condiciones:

$$f(0)=\frac{\cos(0)}{0+1}=1$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^-} a\cdot\frac{2^x-1}{x}=a\cdot\lim_{x\to 0^-}\frac{2^x-1}{x}=a\cdot\frac{1-1}{0}=a\cdot\frac{0}{0}$ → indeterminación → L'Hôpital →

$$\to \quad \lim_{x\to 0^-} a\cdot\frac{2^x-1}{x}=a\cdot\lim_{x\to 0^-}\frac{2^x\cdot\ln(2)}{1}=a\cdot\ln(2)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(x)}{x^2+1}=1$$

Igualamos límites laterales para que converja el límite en $x=0$ .

$$a\cdot\ln(2)=1 \quad\to\quad a=\frac{1}{\ln(2)}$$

# Hoja 20. Problema 5

**5. Calcula** $\lim_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}$

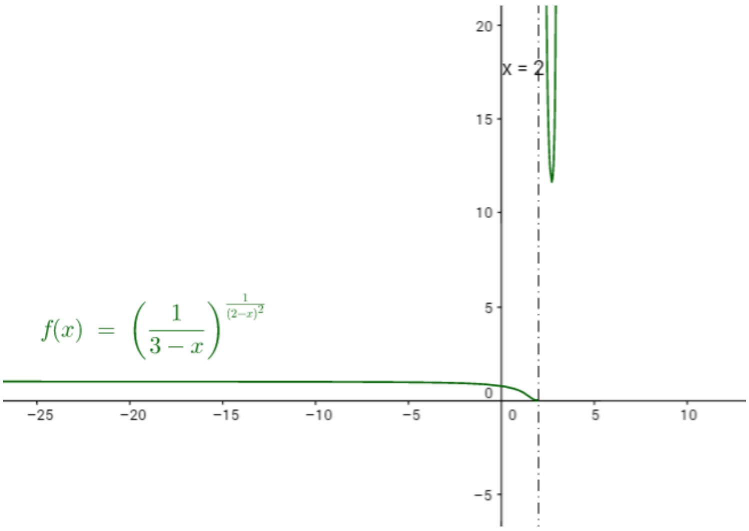
Evaluamos → $\lim_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}} = 1^{\infty}$ → indeterminación → aplicamos logaritmo neperiano

$$\lim_{x\to 2^+} \ln\left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(2-x)^2}\cdot \ln\left(\frac{1}{3-x}\right) = \frac{\ln(1)}{0} = \frac{0}{0}$$ → indeterminación → L'Hôpital

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{3-x}\right)}{(2-x)^2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{\frac{1}{(3-x)^2}}{\frac{1}{3-x}}}{2(2-x)(-1)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{3-x}}{-2(2-x)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{-2(2-x)(3-x)}$$

$$\frac{1}{-2\cdot 0^- \cdot 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$ → aplicamos exponencial y obtenemos el límite de partida.

$$\lim_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}} = e^{+\infty} = +\infty$$ → la gráfica muestra como el límite se dispara a más infinito



## Hoja 20. Problema 6

**6. Sea** $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ **.**

**a) Obtener de manera razonada el dominio y la imagen de la función. Realiza un esbozo de la función.**

**b) Justificar, de manera razonada, por qué la función no admite inversa en su dominio maximal.**

a) El dominio de la función son todos los reales menos $x=\pm 1$ , que es donde se anula el denominador. Realizamos un sencillo estudio de su gráfica para determinar el codominio.

La función pasa por el punto $(0,0)$ . Posee asíntotas verticales en $x=\pm 1$ . No posee asíntota horizontal, pero sí oblicua.

$m=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{(x^2-1)\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^3-x}=1 \rightarrow$ realizamos el cociente de coeficientes que acompañan a la máxima potencia del polinomio.

$n=\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=0$ $\rightarrow$ grado del denominador > grado del numerador

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1} \quad\rightarrow\quad f'(x)=\frac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$f'(x)=0 \;\rightarrow\; x^4-3x^2=0 \;\rightarrow\; x^2(x^2-3)=0 \;\rightarrow\; x=0,\pm\sqrt{3}$ $\rightarrow$ puntos críticos

Evaluamos la derivada a ambos lados de los puntos críticos.

$(-\infty,-\sqrt{3}) \;\rightarrow\; f'(-10)>0 \;\rightarrow\; f(x)\uparrow$

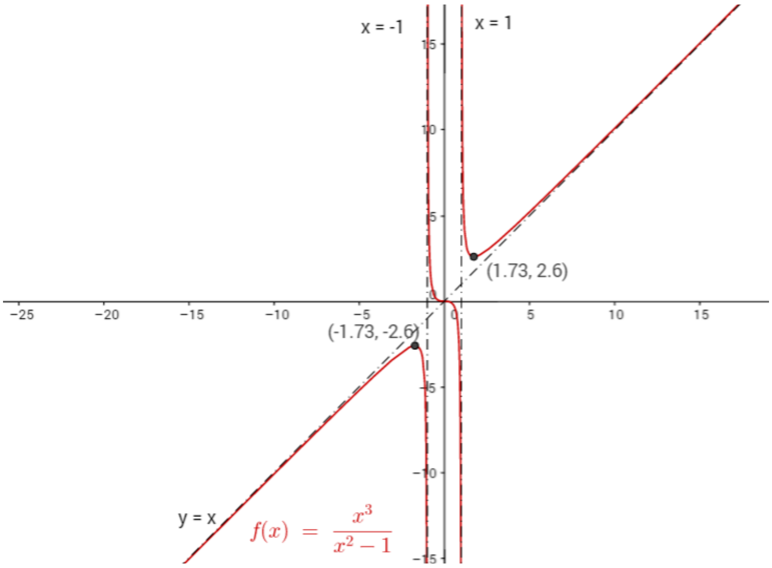
$(-\sqrt{3},-1) \;\rightarrow\; f'\left(\dfrac{-3}{2}\right)<0 \;\rightarrow\; f(x)\downarrow$ $\rightarrow$ máximo en $x=-\sqrt{3}$

$(-1,0) \;\rightarrow\; f'\left(\dfrac{-1}{2}\right)<0 \;\rightarrow\; f(x)\downarrow$

$(0,1) \;\rightarrow\; f'\left(\dfrac{1}{2}\right)<0 \;\rightarrow\; f(x)\downarrow$

$(1,\sqrt{3}) \;\rightarrow\; f'\left(\dfrac{3}{2}\right)<0 \;\rightarrow\; f(x)\downarrow$

$(\sqrt{3},+\infty) \;\rightarrow\; f'(10)>0 \;\rightarrow\; f(x)\uparrow$ $\rightarrow$ mínimo en $x=\sqrt{3}$




El codominio de la función son todos los números reales, como muestra la gráfica.

b) La función no admite inversa por no ser biyectiva, ya que no es inyectiva. Si trazamos, sobre la gráfica, rectas horizontales, encontramos que en determinados tramos cada recta horizontal corta a la gráfica en más de un punto.

## Hoja 20. Problema 7

**7. a) Calcula $a$ y $b$ para que función $f(x)=\frac{a\,x^2+x+b}{x^2-4}$ tenga una asíntota horizontal en $y=-1$ y pase por el punto $(0,1)$ .**

**b) Enuncia el Teorema de Bolzano, y utilízalo para encontrar, con precisión de una cifra decimal, el punto de corte de las gráficas $g(x)=e^x$ y $h(x)=-x$ en el intervalo $[-1,0]$ .**

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{a\,x^2+x+b}{x^2-4}=-1$ → cociente de coeficientes que acompañan a la máxima potencia de los polinomios → $\frac{a}{1}=-1 \;\rightarrow\; a=-1$

$$f(0)=1 \;\rightarrow\; f(0)=\frac{0+0+b}{0-4}=\frac{-b}{4} \;\rightarrow\; \frac{-b}{4}=1 \;\rightarrow\; b=-4$$

b) El Teorema de Bolzano afirma que si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ , tal que $f(a)\cdot f(b)0$ , existe un valor $c\in(a,b)$ solución de la función. Es decir → $f(c)=0$ .

En nuestro caso particular → $e^x=-x$ → $e^x+x=0$ → La función $f(x)=e^x+x$ que queda a la izquierda de la igualdad es continua en toda la recta real, por ser suma de funciones continuas para todos los reales.

En el intervalo $[-1,0]$ → $f(-1)=\frac{1}{e}-1<0$ , $f(0)=e^0+0>1$ → Estamos en condiciones de aplicar Bolzano.

$x=-0,5$ → $f(-0,5)=e^{(-0,5)}-0,5>0$ → Tomamos el intervalo $[-1,-0,5]$

$x=-0,75$ → $f(-0,75)<0$ → Tomamos el intervalo $[-0,75,\; -0,5]$

$x=-0,6$ → $f(-0,6)<0$ → Tomamos el intervalo $[-0,6,\; -0,5]$

El punto de corte, con precisión de una cifra decimal, es $x\simeq-0,5$ .

## Hoja 20. Problema 8

**8. a) Calcula** $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2-5x+4}-x)$

**b) Determinar, de manera razonada, el dominio de** $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}-x$

a) Evaluamos → $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2-5x+4}-x)=\infty-\infty$ → indeterminación → multiplicamos y dividimos por el conjugado de la expresión.

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2-5x+4}-x)=\lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^2-5x+4}-x)(\sqrt{x^2-5x+4}+x)}{\sqrt{x^2-5x+4}+x}=\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-5x+4-x^2}{\sqrt{x^2-5x+4}+x}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-5x+4}{\sqrt{x^2-5x+4}+x}=\frac{-5}{1+1}=\frac{-5}{2}$$ → cociente de coeficientes

b) El dominio de la función serán todos los valores de $x$ que no hagan negativo el discriminante de la raíz. Es decir → $x^2-5x+4\geq 0$

Obtenemos raíces del polinomio → $(x-1)(x-4)\geq 0$ → evaluamos en cada intervalo para saber dónde se cumple la desigualdad.

$(-\infty,1)$ → $x=-10$ --> $(x-1)(x-4)>0$ → Sí se cumple la desigualdad

$(1,4)$ → $x=2$ --> $(x-1)(x-4)<0$ → No se cumple la desigualdad

$(4,+\infty)$ → $x=10$ --> $(x-1)(x-4)>0$ → Sí se cumple la desigualdad

Por lo tanto el dominio de la función resulta ( $-\infty$ , 1] U [4, $+\infty$ ).