Problemas – Tema 2

Solución a problemas de Límite y Continuidad - Hoja 02 - Todos resueltos

Hoja 2. Problema 1

Resuelto por Sara Aparicio (noviembre 2014)

1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ x & si \quad x\geqslant 0 \end{cases}$

En los intervalo abiertos $x<0, x>0$ la función es continua por ser polinómica.

En el punto frontera $x=0$ se cumple:

$$f(0)=0$$
$$\lim_{x\to 0-} f(x)=0 \quad , \quad \lim_{x\to 0+} f(x)=0 \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)=0=L$$
$$f(0)=L$$

Por lo tanto la función es continua en $x=0$. Es decir, $f(x)$ es continua en toda la recta real.

Calculamos la derivada de la función en los intervalos abiertos.

$f'(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ 1 & si \quad x>0 \end{cases}$ → Fíjate que dejamos los intervalos abiertos

En $x=0$ es fácil comprobar que la derivada lateral izquierda es 0 , mientras que la derivada lateral derecha es 1 . Por lo tanto, la función no es derivable en $x=0$. Es decir, la función es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$.

Hoja 2. Problema 2

Resuelto por Isabel Navarro-Pelayo Torres (octubre 2014)

2. ¿En qué puntos no es derivable $y=250-|x^2-1|$ **?**

En primer lugar, para que una función no sea derivable en un punto x_0 se debe cumplir alguno de los siguientes criterios:

- ✓ $f(x)$ no sea continua en ese punto
- ✓ O bien no exista el siguiente límite: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=M\,,M\in R$

Dado que la función va a ser continua en todo su dominio al tratarse de una función polinómica, debemos forzar que se cumpla el segundo criterio. En cualquier caso, demostramos su continuidad.

Expresamos el valor absoluto de otra forma, dejando la función definida en 3 tramos distintos, de forma que estudiaremos la continuidad en los puntos frontera de los intervalos, ya que en el resto de puntos sabemos que será continua por ser polinómica.

$$x^2-1=0$$
$$x=\pm 1\rightarrow puntos\ frontera$$

Estudiamos el signo de los intervalos establecidos entre los puntos frontera.

$(-\infty,-1)\ \rightarrow\ f(x)>0$

$(-1,1)\ \rightarrow\ f(x)<0\ \rightarrow$ Cambio de signo en la función a trozos

$(1,\infty)\ \rightarrow\ f(x)>0$

$$f(x)=\left\{\begin{matrix}250-(x^2-1)\ \ si\ \ x<-1\\ 250+(x^2-1)\ \ si\ \ -1\leq x<1\\ 250-(x^2-1)\ \ si\ \ x\geq 1\end{matrix}\right\}$$

Ahora, estudiamos la continuidad en esos puntos frontera recordando lo que se debe cumplir para que una función sea continua en un punto.

Una función f(x) es continua en $x=x_0$ si:

$$\exists\ f(x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0^-} (f(x)) = \lim_{x \to x_0^+} (f(x)) = L$$
$$L = f(x_0)$$

En $x=1$:

$$f(1)=250-(1^2-1)=250$$
$$\lim_{x \to 1^-} (f(x))=250 \quad , \quad \lim_{x \to 1^+} (f(x))=250$$

En $x=-1$:

$$f(-1)=250+(1^2-1)=250$$
$$\lim_{x \to -1^-} (f(x))=250 \quad , \quad \lim_{x \to -1^+} (f(x))=250$$

Es decir, la función también es continua en $x=1, x=-1$. Por lo tanto, es continua en toda la recta real.

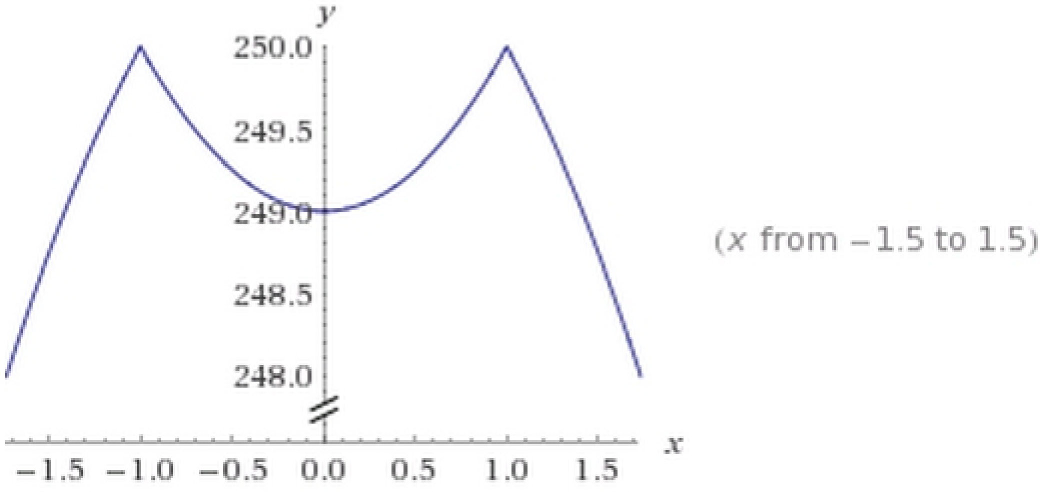
A continuación, pasamos a ver si la función es derivable en los puntos frontera $x=1 \ y \ x=-1$ (recordando que para ello deben coincidir las derivadas laterales de la función evaluada en esos puntos). En el resto de puntos de cada intervalo la función es derivable por ser polinómica.

$$f'(x)=\left\{\begin{matrix} -2\text{x} & si & x<-1 \\ 2\text{x} & si & -1<x<1 \\ -2\text{x} & si & x>1 \end{matrix}\right\}$$ → Fíjate que dejamos los intervalos abiertos

$$\lim_{x \to -1^-} (f'(x))=2 \quad , \quad \lim_{x \to -1^+} (f'(x))=-2$$
$$\lim_{x \to 1^-} (f'(x))=2 \quad , \quad \lim_{x \to 1^+} (f'(x))=-2$$

Al no coincidir las derivadas laterales en $x=-1, x=1$, concluimos que la función no es derivable en esos puntos, donde tendremos puntos angulosos como podemos ver en la gráfica.

Gráfica de $y=250-|x^2-1|$



Hoja 2. Problema 3

Resuelto por Jaime Díaz García (noviembre 2014)

3. ¿Para qué valores de a y b la siguiente función es derivable en todo $\mathbb{R}$?

$$f(x)=\begin{cases} x^3-x & si \quad x\leq 0 \\ a\,x+b & si \quad x>0 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$, tiene que ser en primer lugar continua en todo $\mathbb{R}$. Las condiciones de continuidad en el punto $x=x_0$ son:

$$\exists\ f(x_0),\, x_0\in Dom(f)$$

$$\lim_{x\to x_o^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$$

$$f(x_0)=L$$

Las condiciones para que sea derivable en el punto $x=x_0$ son:

$$f(x)\, sea\ continua\ en\ x_0$$

$$f'(x_0^+)=f'(x_0^-)$$

Primero estudiamos la continuidad en los intervalos abiertos y luego en los puntos frontera.

Continuidad en intervalos abiertos:

$$x<0\Rightarrow f(x)=x^3-x\Rightarrow \ Es\ continua\ por\ ser\ polinómica$$

$$x>0\Rightarrow f(x)=a\,x+b\Rightarrow \ Es\ continua\ por\ ser\ polinómica$$

Continuidad en punto frontera $x=0$:

- ✓ $f(0)=0$
- ✓ $\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x)=b \ \rightarrow \ b=0$
- ✓ $f(0)=L\Rightarrow \ 0=0$ $\rightarrow$ La función es continua en $x=0$ si $b=0$

Derivabilidad en intervalos abiertos:

$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & si \quad x<0 \\ a \quad si & x>0 \end{cases}$ → Fíjate que dejamos los intervalos abiertos

Un polinomio es derivable en todo $\mathbb{R}$. Por lo que las derivada de $f(x)$ será continua en los intervalos abiertos, al ser $f'(x)$ una función definida a trozos, con polinomios en cada tramo.

Derivabilidad en punto frontera $x=0$:

$f'(0^-)=-1$ y $f'(0^+)=a \rightarrow a=-1$

Las derivadas laterales coinciden si $a=-1$.

Hoja 2. Problema 4

Resuelto por Carmen Jiménez (noviembre 2014)

4. ¿Para qué valores de a y b la siguiente función es derivable en todos sus puntos?

$$f(x)=\begin{cases} bx^2+ax & si \quad x<-1 \\ \dfrac{a}{x} & si \quad -1\le x<1 \\ \dfrac{x^2+ax+1}{x+1} & si \quad x>1 \end{cases}$$

Para que sea derivable la función tiene que ser continua. Por tanto tengo que aplicar los tres criterios de continuidad para $x=x_0$.

$$\exists f(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_o^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$$

$$f(x_0)=L$$

Estudio en intervalos abiertos:

$x<-1$ $\rightarrow$ función polinómica $\rightarrow$ continua en todo $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ continua en $(-\infty,-1)$

$-1<x<1$ $\rightarrow$ función continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ $\rightarrow$ función continua en $(-1,1)-\{0\}$

$x>1$ $\rightarrow$ función continua en $\mathbb{R}-\{-1\}$ $\rightarrow$ función continua en $(-1,+\infty)$

Estudio en el punto frontera $x=-1$ **:**

$$f(-1)=b-a$$

$$\lim_{x\to -1^-} bx^2+ax=b-a \ , \ \lim_{x\to -1^+} \frac{a}{x}=\frac{a}{-1}=-a \ \rightarrow \ b-a=-a \ \rightarrow \ b=0$$

$$f(-1)=L=b-a$$

Estudio en el punto frontera $x=1$:

$\nexists f(1)$ → la función no toma ningún valor para $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{a}{x}=\frac{a}{1}=a \quad , \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+ax+1}{x+1}=\frac{2+a}{2} \quad \to \quad a=\frac{2+a}{2} \quad \to \quad 2a=2+a \quad \to \quad a=2$$

Los límites laterales existen, coinciden y son finitos siempre que $a=2$. Pero la función no está definida en $x=1$. Estamos ante una discontinuidad evitable.

Por lo tanto en $x=1$ la función no es continua. Y si no es continua, la función no será derivable en $x=1$.

Por lo tanto, no existe ningún valor para a y para b que hagan la función sea derivable en toda la recta real.

Hoja 2. Problema 5

Resuelto por Nicolás Carrillo (noviembre 2014)

5. Obtener a y b para que la función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 \quad si \quad x<0 \\ \sqrt{a\,x+b} \quad si \quad 0\leq x<2 \\ \dfrac{-x}{\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}} \quad si \quad x>2 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$, primero debe ser continua en todo $\mathbb{R}$.

Las condiciones de continuidad en un punto $x=x_0$ son:

$$\exists\ f(x_0)$$
$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=\lim_{x\to x_0+} f(x)=L$$
$$f(x_0)=L$$

Primero estudiamos la continuidad en los intervalos abiertos y luego en los puntos frontera de los intervalos.

Continuidad en los intervalos abiertos:

$$x<0\rightarrow x^2+2\rightarrow continua\,en\,x<0\ por\ ser\ polinómica$$
$$0<x<2\rightarrow\sqrt{ax+b}\rightarrow continua\ en\,0<x<2\,si\,(ax+b)\geq 0$$
$$x>2\rightarrow\frac{-x}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}\rightarrow continua\ en\,x>2\ por\,ser\ polinómica$$

Punto frontera en $x=2$:

$$\nexists\ f(2)\rightarrow f(x)\,no\,es\,continua\,en\ x=2$$

Punto frontera en $x=0$:

$$\exists\ f(0)$$
$$\lim_{x\to 0+} \sqrt{ax+b}=\sqrt{b} \quad , \quad \lim_{x\to 0-} x^2+2=2 \quad \to \quad 2=\sqrt{b}\to b=4$$
$$f(0)=L$$

Por lo tanto la función es continua en $x=0$ si $b=4$, siempre y cuando el discriminante de la raiz cumpla a su vez $a\,x+b\geq 0$. Es decir:

$$0<x<2\to\sqrt{ax+b}=\sqrt{ax+4}\to \ continua\ en\ 0<x<2\ si\ (ax+4)\geq 0\to ax\geq -4\to a\geq\frac{-4}{x}$$

Siempre que a sea mayor o igual que el cociente $\frac{-4}{x}$ tendremos garantizada la continuidad en el intervalo abierto $(0,2)$. Vamos a estudiar la derivabilidad para saber si tenemos alguna condición mas que aplicar sobre a . Al derivar escribimos los intervalos abiertos y luego se estudia la derivabilidad en los puntos frontera.

$$f'(x)=\begin{cases} 2\mathrm{x} \quad si \quad x<0 \\ \dfrac{a}{2\cdot\sqrt{a\,x+4}} \quad si \quad 0<x<2 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \quad si \quad x>2 \end{cases}$$

En $x=2$ sabemos que la función no es derivable por no ser continua.

En $x=0$ será derivable si coinciden las derivadas laterales en ese punto.

$$f'(0-\ )=0 \quad , \quad f'(0+\ )=\frac{a}{4} \quad \to \quad \frac{a}{4}=0 \quad \to \quad a=0$$

Con este valor nulo de a siempre garantizamos que se cumpla la condición $a\geq\frac{-4}{x}$, ya que el cociente $\frac{-4}{x}$ siempre es negativo en el intervalo $x\in(0,2)$.

Con $a=0$, $b=4$, la función $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$.

Hoja 2. Problema 6

Resuelto por Carmen Martín Rubio (noviembre 2014)

6. Obtener a y para que la función $f(x)$ sea derivable en $x=1$.

$$f(x)=\begin{cases} 3-a x^2 & si \quad x\leq 1 \\ \dfrac{2}{a x} & si \quad x>1 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x=1$, debe ser continua en ese punto.

$$f(1)=3-a$$

$$\lim_{x\to 1^-} 3-ax^2=3-a \quad , \quad \lim_{x\to 1^+} (\frac{2}{ax})=\frac{2}{a} \quad \rightarrow \quad 3-a=\frac{2}{a} \quad \rightarrow \quad 3\cdot a-a^2-2=0 \quad \rightarrow \quad a=1 \;\; ó \;\; a=2$$

Estudiemos la derivabilidad.

$$f'(x)=\begin{cases} -2\cdot a\cdot x & si \quad x<1 \\ \dfrac{-2}{a\cdot x^2} & si \quad x>1 \end{cases}$$ → Fíjate que dejamos los intervalos abiertos

Las derivadas laterales en $x=1$ deben ser iguales:

$$f'(1^-)=-2\cdot a \quad , \quad f'(1^+)=\frac{-2}{a} \quad \rightarrow \quad -2\cdot a=\frac{-2}{a} \quad \rightarrow \quad a^2=1 \quad \rightarrow \quad a=-1 \;\; ó \;\; a=1$$

Concluyendo de las condiciones de continuidad y derivabilidad: $f(x)$ será continua y derivable en $x=1$ si y solo si $a=1$.