Problemas – Tema 2

Solución a problemas de Límite y Continuidad - Hoja 01 - Problemas 1, 2, 5

Hoja 1. Problema 1

Resuelto por Carlos Pareja (octubre 2014)

1. Estudia la derivabilidad de la función $f(x)=|x|$

Rompemos la función a trozos → $f(x)=\begin{cases} -x & si \quad x<0 \\ x & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

Estudiamos la continuidad en el punto frontera $x=0$, ya que en en los intervalos abiertos de cada tramo tenemos un polinomio y sabemos que es una función continua y derivable en toda la recta real.

$$f(0)=0$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=0=L$$
$$f(0)=0=L$$

Por lo tanto la función es continua en $x=0$. Para estudiar la derivabilidad evaluamos las derivadas laterales (aplicando la definición formal de derivada).

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0} \frac{f(0^- +h)-f(0^-)}{h}=-1$$
$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0} \frac{f(0^+ +h)-f(0^+)}{h}=1$$

Al no coincidir, la función no es derivable en $x=0$. Por lo tanto → $f'(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x<0 \\ 1 & si \quad x>0 \end{cases}$ → Fíjate que dejamos los intervalos abiertos porque no es derivable en $x=0$.

Hoja 1. Problema 2

Resuelto por Ana Jerónimo (octubre 2014)

2. Estudia continuidad y derivabilidad en $f(x)=\begin{cases} -x & si \quad x<0 \\ x^2 & si \quad x\geqslant 0 \end{cases}$ **.**

Estudiamos la continuidad en el punto frontera $x=0$, ya que en el resto del dominio de $f(x)$ la función es continua por ser un polinomio.

Una función $f(x)$ es continua en un punto $x=a$ si y sólo si se cumplen las siguientes tres condiciones:

El punto $x=a$ tiene imagen → $\exists f(a)$

Existe el límite de la función en $x=a$ $\rightarrow$ $\exists \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)$

La imagen coincide con el límite de la función en el punto $\rightarrow$ $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$

Aplicamos estas tres condiciones al punto $x=0$.

$$f(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}(-x)=0 \quad , \quad \lim_{x\to 0^+}(x^2)=0 \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to 0^-}(-x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2)=\lim_{x\to 0} f(x)$$

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$$

Por lo tanto, la función es continua en $x=0$. A continuación, estudiamos la derivabilidad.

Una función es derivable en un punto $x=a$ si, y sólo si, es derivable por la izquierda y por la derecha en dicho punto y las derivadas laterales coinciden.

$$f'(a^-)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a^-+h)-f(a^-)}{h}$$

$$f'(a^+)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a^++h)-f(a^+)}{h}$$

Aplicando esta condición a la izquierda y derecha de $x=0$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{-(0+h)-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-(0+h)-0}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{-h}{h}\right)=-1$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(0+h)^2-0^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(0+h)^2-0^2}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{h^2}{h}\right)=\lim_{h\to 0}(h)=0$$

Al no coincidir las derivadas laterales la función no es derivable en $x=0$.

Hoja 1. Problema 5

Resuelto por Gabriel Manzano Montes (octubre 2014)

5. Hallar los puntos en que $y=|x^2-5x+6|$ no tiene derivada. Justificar el resultado representando su gráfica.

Obtenemos la raíces de la función contenida dentro del valor absoluto:

$$x^2-5x+6=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_1=2 \quad y \quad x_2=3$$

Los puntos donde el eje OX corta a la parábola son $(2,0),(3,0)$.

Evalúo $y=x^2-5x+6$ dando valores a la izquierda de 2 , entre $2y3$, y a la derecha de 3 , para determinar el signo de la parábola.

$$+ \quad 2 \quad - \quad 3 \quad +$$

A la izquierda de 2, obtenemos valores positivos d ella función parábola. Entre 2 y 3 salen valores negativos. A la derecha de 3 tenemos valores positivos.

El valor absoluto hace positivo los tramos donde la función es negativa. Por lo tanto, al romper la función en trozos, entre 2 y 3 deberemos cambiar el signo de la función para obtener valores positivos y poder quitar así el valor absoluto:

$$f(x)=\left(\begin{array}{ll} x^2-5x+6 & si \quad x<2 \\ -x^2-5x+6 & si \quad 2\leq x<3 \\ x^2-5x+6 & si \quad x\geq 3 \end{array}\right)$$

Fíjate que, en un uno de los extremos, cerramos lo intervalos mediante un signo igual.

Para calcular la continuidad realizamos el límite de 2 y 3 por la izquierda y por la derecha, para ver si la función se acerca progresivamente a sus valores límite.

$$\lim_{x\to 2-} (x^2-5x+6)=0$$
$$\lim_{x\to 2+} (-x^2+5x-6)=0$$
$$\lim_{x\to 3-} (-x^2+5x-6)=0$$
$$\lim_{x\to 3+} (x^2-5x+6)=0$$

Por lo tanto la función tiene límite en 2 y en 3, al coincidir sus límites laterales. Y este límite coincide con el valor de la función: $f(2)=0$, $f(3)=0$ → la función es continua en $x=2$ y en $x=3$.

En el resto de los intervalos, la función sigue siendo continua por ser suma de polinomios (que son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$) → la función $y=|x^2-5x+6|$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

Para estudiar la derivabilidad, derivamos nuestra función y escribimos la función derivada con los intervalos abiertos.

$$f'(x)=\begin{pmatrix} 2x-5 & si \quad x<2 \\ -2x-5 & si \quad 2<x<3 \\ 2x-5 & si \quad x>3 \end{pmatrix}$$

Para comprobar que la función es derivable evaluamos la derivada de la función para los puntos $2\,y\,3$, tanto por la derecha como por la izquierda.

$$f'(2^-)=-1$$
$$f'(2^+)=-9$$
$$f'(3^-)=-11$$
$$f'(3^+)=1$$

Al no coincidir las derivadas laterales, la función no es derivable en $x=2\,y\,x=3$, donde encontramos puntos angulosos como podemos apreciar en la gráfica.

$Gráfica \ \ de \ \ f(x)=|x^2-5x+6|$