

Instrucciones:

a) Duración: 50 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. Indica, en la primera hoja donde resuelves el examen, la opción elegida.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe a bolígrafo (no a lápiz) ordenadamente y con letra clara. Las faltas de ortografía y la mala presentación pueden restar hasta un máximo de 2 puntos de la nota final (-0,25 por falta, borrón o tachón).

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 punto] Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(2x) + b \operatorname{sen}(x)}{4x^2}$ es finito, calcula b y el valor del límite.

Ejercicio 2.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = |x^2 - 2x|$ y $g(x) = \ln(x)$.

a) [1 punto] Realiza un esbozo de ambas gráficas sobre los mismos ejes.

b) [1,5 puntos] Enuncia el Teorema de Bolzano, y utilízalo para encontrar, con precisión de una cifra decimal, el punto de corte de ambas gráficas en el intervalo $[2,3]$.

Ejercicio 3.- a) [1,5 puntos] Demostrar que la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ definida en el dominio $[1, \infty)$ admite inversa.

b) [1 punto] Obtener la función inversa $f^{-1}(x)$ y comprobar que se cumplen las igualdades: $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Calcula $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{3-x} \right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}$.

Opción B

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Calcula $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}$.

Ejercicio 2.- Sea $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

a) [2 puntos] Obtener de manera razonada el dominio y la imagen de la función. Realiza un esbozo de la función.

b) [0,5 puntos] Justificar, de manera razonada, por qué la función no admite inversa en su dominio maximal.

Ejercicio 3.- a) [1 punto] Enuncia y demuestra el teorema de Bolzano.

b) [1,5 puntos] Utiliza el Teorema de Bolzano para encontrar, con precisión de una cifra decimal, el punto de corte de las funciones $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = \ln(x)$ en el intervalo $[2,3]$.

Ejercicio 4.- a) [1 punto] Determinar k para que la función sea continua en $x=0$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1-e^x}{2x+1-e^{2x}} & \text{si } x < 0 \\ (2x-k)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) [1,5 punto] Indica un dominio que permita que la función $f(x) = \cos(x)$ admita inversa. Demuestra que, en ese dominio que propones, la función es biyectiva.