

Instrucciones:

a) Duración: 50 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. Indica, en la primera hoja donde resuelves el examen, la opción elegida.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe a bolígrafo (no a lápiz) ordenadamente y con letra clara. Las faltas de ortografía y la mala presentación pueden restar hasta un máximo de 2 puntos de la nota final (-0,25 por falta, borrón o tachón).

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1.-

a) [2 puntos] Demostrar que la función $f(x) = \cos(x)$ definida en $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ es biyectiva.

b) [1 punto] Obtener la función inversa de $f(x) = \cos(x)$

Ejercicio 2.- Aplica la definición métrica de límite para demostrar:

a) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow 7} (2 - x) = -5$

b) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$

Ejercicio 3.- [3 puntos] Determinar a y b para que la función sea continua en toda la recta real.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{si } x \leq -2 \\ ax + b & \text{si } -2 < x < 2 \\ x^2 - x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Ejercicio 4.- [2 puntos] Calcula k para que $f(x)$ sea continua en toda la recta real.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6x+6}{x^2-1} & \text{si } x < -1 \\ 2x+k & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Opción B

Ejercicio 1.- [3 puntos] Escribe la ecuación de una función que no esté definida en $x = 0$ pero si tenga límite cuando x tiende a 0, y que ese límite sea finito.

Ejercicio 2.- Aplica la definición métrica de límite para demostrar:

a) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{-2}{x-1} \right) = -\infty$

b) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+3) = +\infty$

Ejercicio 3.- [3 puntos] Estudia la continuidad de la función $f(x)$ en toda la recta real. En los puntos donde no sea continua, indicar el tipo de discontinuidad.

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x < 1 \\ \frac{4x-4}{x^2-1} & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } 3 \leq x < 6 \\ 4 & x \geq 6 \end{cases}$$

Ejercicio 4.- [2 puntos] Calcular los valores de los parámetros a y b para que la función sea continua en toda la recta real.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{e^x} & \text{si } x \leq 1 \\ ax+b & \text{si } 1 < x < e \\ \frac{\ln(x)}{x} & \text{si } x \geq e \end{cases}$$