

Instrucciones:

a) Duración: 50 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. Indica, en la primera hoja donde resuelves el examen, la opción elegida.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe a bolígrafo (no a lápiz) ordenadamente y con letra clara. Las faltas de ortografía y la mala presentación pueden restar hasta un máximo de 2 puntos de la nota final (-0,25 por falta, borrón o tachón).

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Una función tiene tres raíces en el intervalo $[-4, 2]$ y toma valores de igual signo en los extremos de ese intervalo. ¿Contradice esto al Teorema de Bolzano? Razona detalladamente y dibuja la gráfica de una función que justifique tu respuesta.

Ejercicio 2.- a) [1,5 puntos] Determinar a y b para que la función sea continua en $x=1$ y su gráfica pase por el punto $(2, 0)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)-1}{2x+1-e^{2x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2x^2 - ax + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) [1 punto] Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 4} - x)$

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Determina a para que se cumpla $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + a}{x - a} - \frac{x^2 - a}{x + a} \right) = 6$

Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Obtener el dominio de $f(x) = \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right)$

Opción B

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Utiliza el Teorema de Bolzano para demostrar que la función $f(x) = 2 + 2x - e^x$ corta al eje OX en el intervalo $[-1, 1]$. Obtener el punto de corte con una precisión de una cifra decimal.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Calcula $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{\sqrt{x-2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \right)$

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Manolo pregunta: "¿La parábola $y = x^2$ es la función inversa de la raíz cuadrada $y = \sqrt{x}$?". Antonio responde: "Sí". Isabel responde: "No". María responde: "Depende".

¿Quién tiene razón? Justifica tu respuesta de manera razonada.

Ejercicio 4.- a) [1,5 puntos] Analiza la continuidad de la función en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2^x - 1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) [1 punto] Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$ y clasifica los tipos de discontinuidades.