Teoría – Tema 1

Aplicar logaritmo en límites 0 elevado a 0 e infinito elevado a 0

Índice de contenido

Propiedades del logaritmo y su aplicación en límites

El logaritmo es la función inversa a la exponencial.

Si la base del logaritmo es el número e, hablamos de logaritmo neperiano o natural (ln). Si la base es 10, hablamos de logaritmo decimal o en base 10 (lg).

Por lo tanto:

$$\log(10^x)=10^{\log(x)}=x$$
$$\ln(e^x)=e^{\ln(x)}=x$$

Como ya sabemos de cursos anteriores, el logaritmo de un producto es igual a la suma de logaritmos.

$$\log(x\cdot y)=\log x+\log y$$

Asimismo, el logaritmo de un cociente es la diferencia de logaritmos.

$$\log\left(\frac{x}{y}\right)=\log x-\log y$$

El logaritmo de una potencia es el exponente de la potencia por el logaritmo de la base.

$$\log(x^y)=y\cdot\log x$$

No debemos confundir esta última propiedad con el hecho de que todo el logaritmo esté elevado a un exponente. Es decir: $\log(x^y)\neq\log^y x$.

Pues bien, **en ciertos límites que al ser evaluados tienden a 0^0 ó ∞^0 podemos aplicar logaritmo para convertir el límite en un caso $0\cdot\infty$ que podamos resolver por técnicas estudiadas en temas anteriores**. Sin olvidar que, **al final del cálculo**, deberemos **aplicar la función exponencial** para recuperar el límite de partida.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0} e^{\ln f(x)^{g(x)}}=\lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$$

Algunos ejemplos

Una vez tengamos la indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$ podemos manipular algebraicamente el límite para conseguir una indeterminación $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ y poder aplicar, según corresponda, infinitésimos, L'Hôpital, conjugado, dividir por la máxima potencia, etc.

Ejemplo

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = 0^0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln\left(x^x\right) = \lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty} \to L'Hôpital \to \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0$$

$e^0 = 1$ ==> $\lim_{x \to 0^+} x^x = 1$

Para practicar...

Comprueba que las siguientes soluciones son correctas:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left(tg(x)\right)^{sen(x) - \frac{\pi}{2}} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \left(1 - \cos(x)\right)^x = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(sen(x)\right)^{tg(x)} = 1$$