Teoría – Tema 1

El número e en los límites que tienden asintoticamente a 1 elevado a infinito

Índice de contenido

Definición del número e

Pensemos en la siguiente sucesión de números naturales:

$$a_1=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2$$

$$a_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2{,}25$$

$$a_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\simeq 2{,}37...$$

…

…

$$a_{100}=\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}\simeq 2{,}7048...$$

…

…

$$a_{999}=\left(1+\frac{1}{999}\right)^{999}\simeq 2{,}7169...$$

…

…

El término general de esta sucesión es $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n ,\ n\in\mathbb{N}$.

Observando los valores comprobamos que la sucesión es **estrictamente creciente**, es decir, $a_{n+1}>a_n$.

Además **la diferencia entre dos términos consecutivos disminuye conforme crece la serie**, es decir, $|a_{n+1}-a_n|\underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Por lo tanto podemos intuir que la serie crece indefinidamente, de manera asintótica, hacia una cota superior. **Este valor que acota superiormente la serie es el número e**.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\simeq 2{,}716922...,\quad n\in\mathbb{N}$$

El número e es un número irracional, con infinitos decimales, y aparece, por ejemplo, en fenónemos naturales como el tiempo de desintegración medio de átomos radiactivos, en ecuaciones que modelan las señales eléctricas de los circuitos electrónicos, en ecuaciones que estiman la probabilidad de ciertos sucesos estadísticos, etc. Su importancia es vital en el aparato matemático de la ciencia actual.

Para algunos matemáticos el número e forma parte de los cinco números fundamentales en matemáticas: 0, 1, e, i, π (donde i representa la unidad imaginaria $\sqrt{i}$).

Existe una ecuación que relaciona estas cinco cantidades:

$$e^{i\pi}+1=0$$

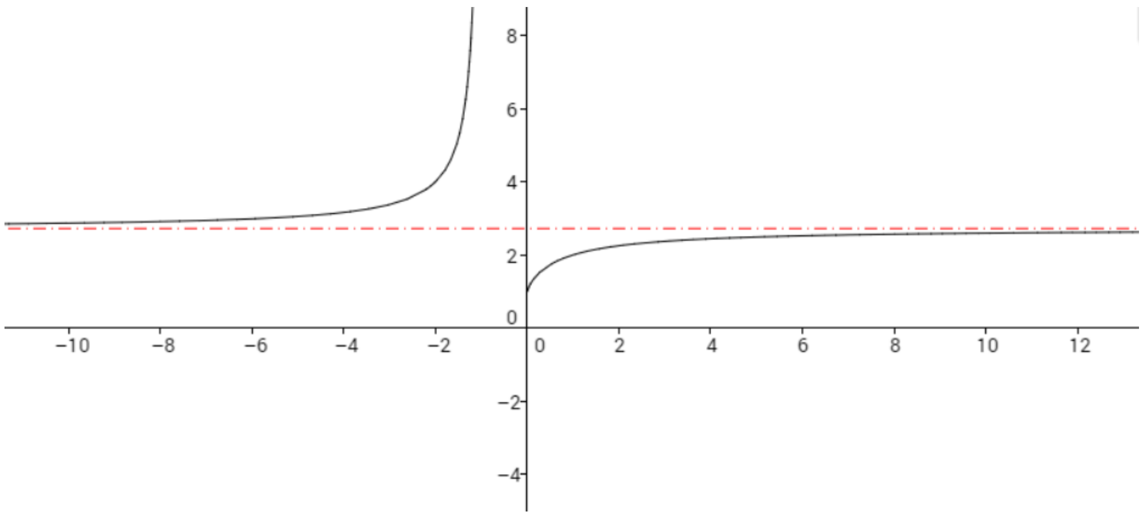
No conocemos si tiene alguna aplicación práctica de esta ecuación, pero no deja de ser sorprendente la existencia de esta igualdad donde solo aparecen estas cinco cifras fundamentales.

Pues bien, si la serie de números naturales (valores discretos) la expresamos para números reales (valores continuos) tendremos una **función de variable real cuya asíntota horizontal converge al número e** (recordamos que la base de una potencia debe ser positiva si el exponente es una función de variable real).

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x},\quad x\in\mathbb{R}-\{0\} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\simeq 2{,}716922...$$

------- $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x},\quad x\in\mathbb{R}-\{0\}$

------- $y=e$



Límites que tienden asintóticamente a 1 elevado a infinito

Podemos utilizar las propiedades del número e, definido anteriormente como función de variable real, para aquellos límites que tienden a 1^{∞} conforme x tiende a un valor x_0 .

Este valor x_0 **puede ser el propio infinito o cualquier número real**, con la condición que el **límite tienda asintóticamente a** 1^{∞} .

Recordando que el límite de una potencia es igual al límite de la base elevado al límite del exponente:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = [\lim_{x\to x_0} f(x)]^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

Podemos operar de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} [1+f(x)-1]^{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\left[1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\left[1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\frac{1}{f(x)-1}\cdot g(x)\cdot[f(x)-1]}$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\frac{1}{f(x)-1}\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)\cdot[f(x)-1]} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\cdot[f(x)-1]}$$

Donde si $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 1^{\infty}$ ==> $f(x)\underset{x\to x_0}{\to} 1$ ==> $\frac{1}{f(x)-1}\underset{x\to x_0}{\to}\infty$ ==> Encontramos la **definición del número e** como $\left(1+\frac{1}{'algo'}\right)^{'algo'}$ con 'algo' tendiendo a infinito.

Resolvermos el siguiente ejemplo de dos formas: deduciendo cada paso y aplicando la fórmula.

Ejemplo

$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$ → Deducimos → $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{-1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{-1}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{-1}{x}}\right)^{\frac{-1}{x}\cdot(-1)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$ → Fórmula $e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\cdot[f(x)-1]}$ → $e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(1-x-1)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(-x)} = e^{\lim_{x\to 0} -1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Para practicar...

Comprueba si las siguientes soluciones son correctas:

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}+k} = e \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{k}{x}} = e^k \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (sen(x))^{tg(x)} = 1$$