Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso de 1ºBachillerato - Hoja 08 - Problemas 1, 2

Hoja 8. Problema 1

Resuelto por Álvaro Ruiz (septiembre 2014)

1. Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada $f'(x)=(x-4)^2(x^2-8x+7)$:

a) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

b) Hallar los máximos y mínimos relativos de $f(x)$.

c) ¿Es el punto $x=4$ un punto de inflexión de f? Justicar razonadamente la respuesta.

a) Para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ usamos la primera derivada derivada. Calculemos sus raíces → $f'(x)=0$.

$$x=4$$

$$x^2-8x+7=0 \rightarrow x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot1\cdot7}}{2\cdot1}\rightarrow x=1, x=7$$

Evaluamos la derivada para estimar los crecimientos.

Función $f(x)$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$
Intervalos	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4,7)$	$(7,+\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(0)>0$	$f'(2)<0$	$f'(5)<0$	$f'(10)>0$

La función es creciente en los intervalos $(-\infty, 1)\cup(7,+\infty)$ y decreciente en el intervalo $(1,7)$.

b) Observando la tabla de valores del apartado anterior, confirmamos que:

$x=1$ → Máximo relativo

$x=7$ → Mínimo relativo

c) Al tener un punto de inflexión en $x=4$, la segunda derivada debe anularse en $x=4$.

$f'(x)=(x-4)^2(x^2-8x+7) \rightarrow f''(x)=2(x-4)(x^2-8x+7)+(x-4)^2(2x-8)$

$f''(x)=(x-4)[2(x^2-8x+7)+(x-4)(2x-8)]=(x-4)(2x^2-16x+14+2x^2-16x+32)$

$f''(x)=(x-4)(4x^2-32x+46)=2(x-4)(2x^2-16x+23)$

$f''(4)=0 \rightarrow x=4$ es uno de los candidatos a punto de inflexión

Evaluamos la tercera derivada en $x=4$. Y si el resultado es distinto de 0 , confirmaremos la existencia de un punto de inflexión en $x=4$.

$f''(x)=2(x-4)(2x^2-16x+23) \rightarrow f'''(x)=2[(2x^2-16x+23)+(x-4)(4x-16)]$

$f'''(x)=2(2x^2-16x+23+4x^2-16x-16x+64)=2(6x^2-48x+87)=6(2x^2-16x+29)$

$f'''(4)=-18\neq 0 \rightarrow x=4$ es un punto de inflexión

Hoja 8. Problema 2

Resuelto por Mª Isabel Navarro-Pelayo Torres (septiembre 2014)

1. Sea f la función definida por $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$ **, para** $x\neq-1, x\neq2$ **.**

a) Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de la función.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.
c) Calcula, si existe, algún punto de la gráfica de la función donde ésta corta a la asíntota horizontal.

a) Se trata de una función racional, es decir, un cociente de funciones polinómicas. Por tanto → $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-1,2\}$

<u>Asíntota vertical</u>

En $x=-1$ y $x=2$ el denominador se anula. Por tanto, estudiamos los límites laterales.

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{2}{0^+}=+\infty \qquad \lim_{x\to-1^+}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^-}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{8}{0^-}=-\infty \qquad \lim_{x\to2^+}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{8}{0^+}=+\infty$$

Existen dos asíntotas verticales en $x=-1$ y $x=2$.

<u>Asíntota horizontal</u>

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\frac{2}{1-0-0}=2$$

Como se cumple que $\lim_{x\to\infty}f(x)=k,\ k\in\mathbb{R}$ → Existe una asíntota horizontal en $y=2$.

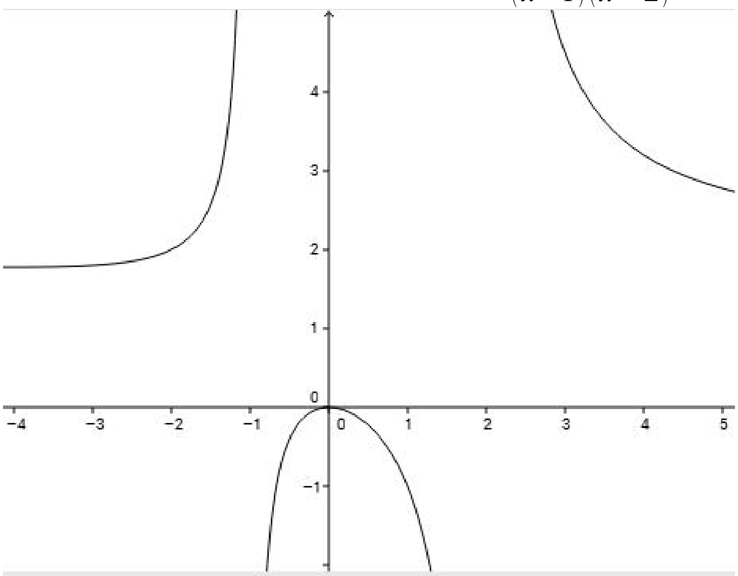
Asíntota oblicua

Al haber asíntota horizontal, no puede haber asíntota oblicua $y=mx+n$. En cualquier caso lo demostramos.

$$m=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^2-x-2}=\infty$$

Como m debe ser un número finito y distinto de 0 , no hay asíntota oblicua.

$$\textit{Representación gráfica de } f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$$



b) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento debemos calcular la primera derivada:

$$f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{2x^2}{x^2-x-2}\quad\rightarrow\quad f'(x)=\frac{4x(x^2-x-2)-2x^2(2x-1)}{(x^2-x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4x^3-4x^2-8x-4x^3+2x^2}{(x^2-x-2)^2}=\frac{-2x^2-8x}{(x^2-x-2)^2}$$

Igualamos la primera derivada a 0 para hallar los puntos críticos candidatos a extremos relativos.

$$f'(x)=0\quad\rightarrow\quad -x(2x+8)=0$$

Tenemos de valores críticos: $x=0$, $x=-4$.

Función $f(x)$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\downarrow$
Intervalos	$(-\infty,-4)$	$(-4,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(-10)<0$	$f'(-2)>0$	$f'(\frac{-1}{2})>0$	$f'(1)<0$	$f'(10)<0$

c) Para calcular el punto de corte de la gráfica con la asíntota horizontal es necesario hacer un sistema de ecuaciones con la asíntota $y=2$ y la función.

$$\left\{\begin{matrix} f(x)=2 \\ f(x)=\frac{2x^2}{x^2-x-2} \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Igualamos} \rightarrow \quad 2=\frac{2x^2}{x^2-x-2} \quad \rightarrow \quad -x-2=0 \quad \rightarrow \quad x=-2$$

El punto de corte es $(-2,2)$.