Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso de 1ºBachillerato - Hoja 07 - Problemas 2, 4, 5

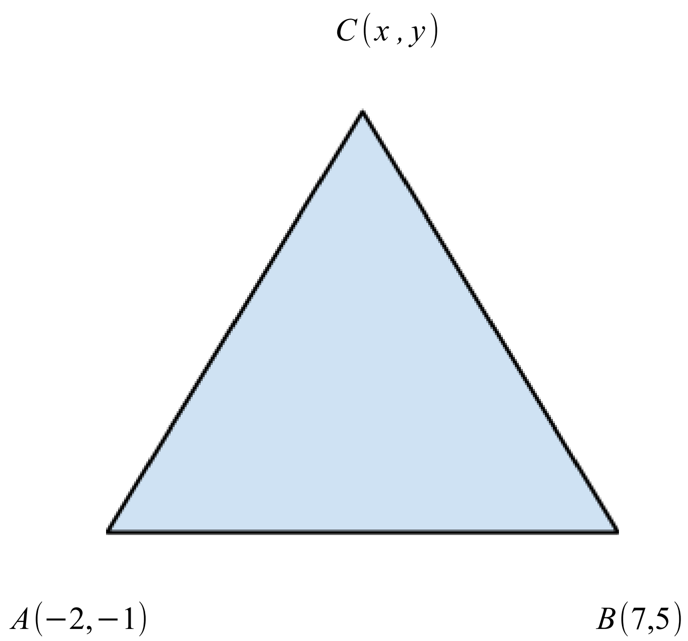
Hoja 7. Problema 2

Resuelto por Luis Sola Ruiz (septiembre 2014)

1. Los vértices de un triángulo son $A(-2,-1), B(7,5)$ y $C(x,y)$ **.**

a) Calcular el área del triángulo en función de x **e** y **.**
b) Encontrar el lugar geométrico de los puntos (x,y) **tales que la anterior área sea 36 u^2.**

a) Hacemos un dibujo ilustrativo con los datos del enunciado.



Hallamos el vector director de la recta que une los puntos A y B .

$\vec{AB}=(7-(-2),5-(-1))=(9,6)$

El módulo de este vector será la base de nuestro triángulo.

$$base=|\vec{AB}|=\sqrt{9^2+6^2}=\sqrt{117}$$

La altura h es la distancia del punto $C(x,y)$ a la recta que pasa por $A(-2,-1)$ y $B(7,5)$. Calculamos la ecuación de esta recta, sabiendo que pasa por $A(-2,-1)$ y que un vector director es $\vec{AB}=(9,6)$.

$$\frac{x-x_0}{U_x}=\frac{y-y_0}{U_y} \rightarrow \frac{x-(-2)}{9}=\frac{y-(-1)}{6} \rightarrow 2x-3y+1=0$$

De esta forma tenemos la ecuación implícita de la recta $r: Ax+By+C=0$. Dado un punto $C(x,y)$ exterior a la recta, su distancia respecto la recta es:

$$d(C,r)=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|2x-3y+1|}{\sqrt{13}}=altura$$

Por lo tanto el área del triángulo podemos calcularla como:

$$Área=\frac{1}{2}\cdot base\cdot altura=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{117}\cdot\frac{|2x-3y+1|}{\sqrt{13}} \rightarrow Área=\frac{3}{2}|2x-3y+1|$$

b) Si el área es igual a 36 unidades cuadradas, igualamos la expresión anterior a 36.

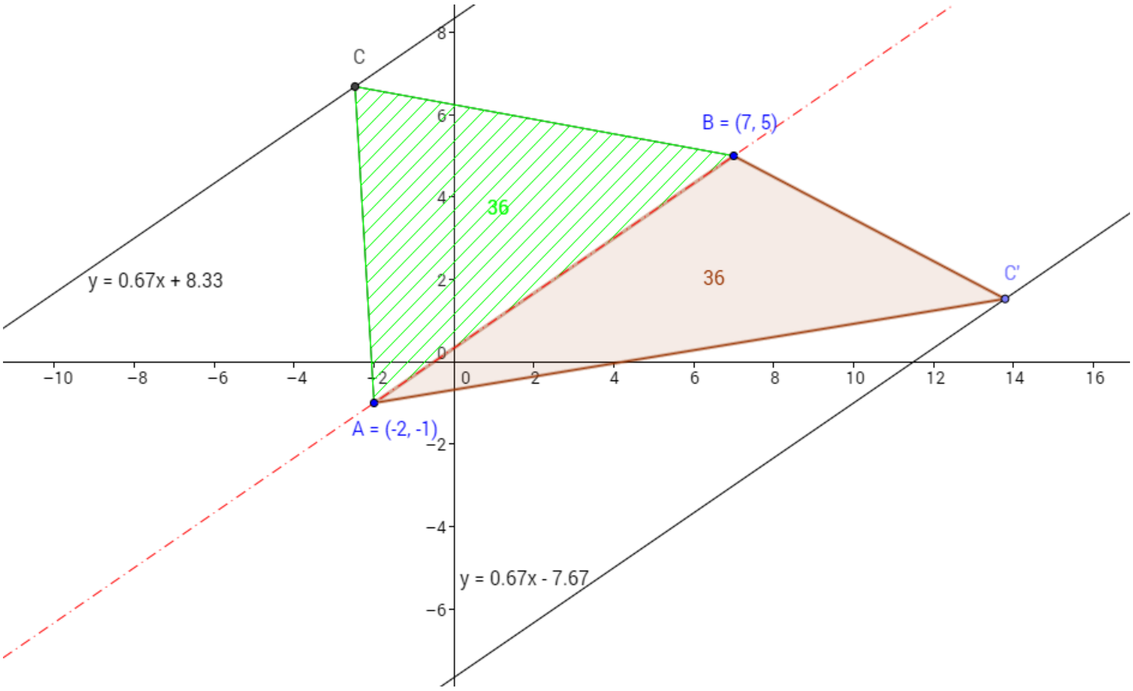
$$\frac{3}{2}|2x-3y+1|=36 \rightarrow |2x-3y+1|=24$$

Como la función contenida en el valor absoluto debe ser igual a ± 24, tendremos dos opciones.

$$2x-3y+1=24 \rightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{23}{3}$$

$$2x-3y+1=-24 \rightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{25}{3}$$

Los puntos (x, y) *de las rectas solución generan triángulos de área* $36\ u^2$



Hoja 7. Problema 4

Resuelto por Carlos Pareja (octubre 2014)

4. Determinar la ecuación cartesiana de los puntos del lugar geométrico del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A(0,0)$ y $B(1,1)$ es igual a 9. Si se trata de una curva cerrada, calcular el área que encierra.

Aplicamos la suma de los cuadrados de las distancias, suponiendo que $P(x,y)$ es uno de los puntos del lugar geométrico del plano que satisface las condiciones del enunciado.

$$d(P,A)^2+d(P,B)^2=9$$

$$\left(\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\right)^2=9$$

$$x^2+y^2+(x^2+1-2x)+(y^2+1-2y)=9$$

$$2x^2+2y^2-2x-2y=7$$

$$x^2+y^2-x-y=\frac{7}{2}$$

Operamos la ecuación de tal forma que podamos aplicar la expresión general de la circunferencia o de la elipse.

Circunferencia → $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

Elipse → $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

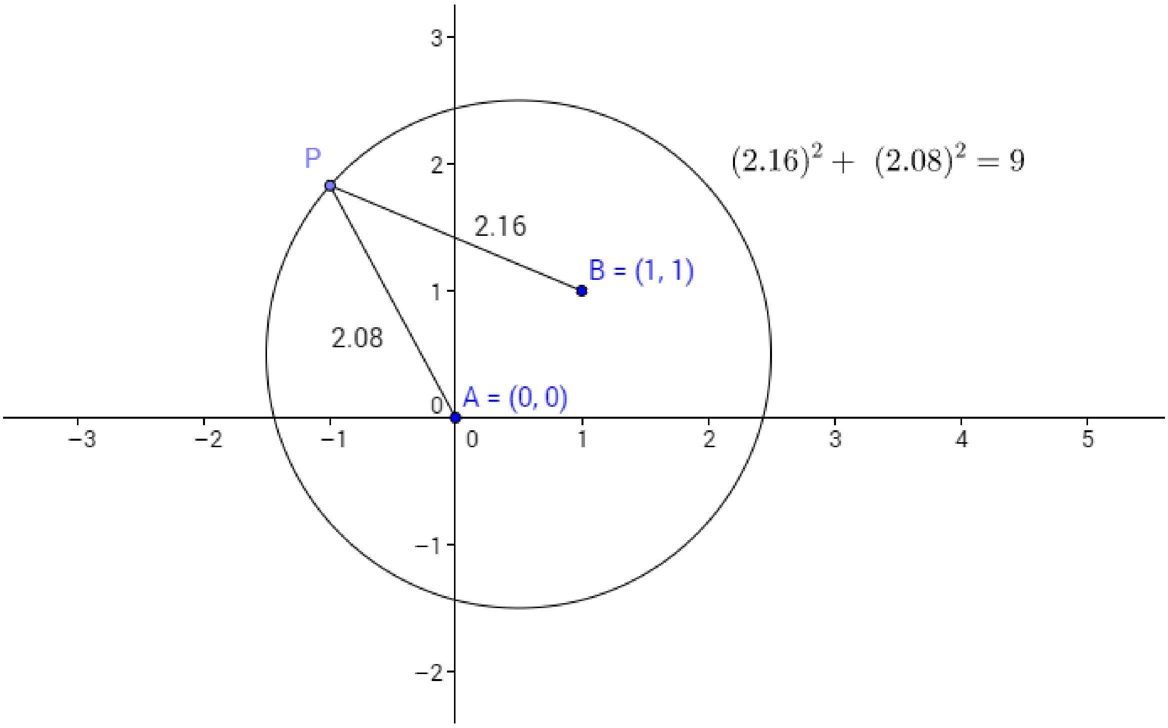
$$x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+y^2-y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{7}{2}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=\frac{7}{2}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{2}+\frac{2}{4}$$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=4$ → Circunferencia de centro $C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ y radio 2

La representación gráfica de la circunferencia confirma las condiciones pedidas por el enunciado.



El área encerrada por la curva será el área de un círculo de radio $2 \quad u$.

$A=\pi\cdot r^2=\pi\cdot 2^2=4\cdot\pi \quad u^2$

Hoja 7. Problema 5

Resuelto por Javier de Orbe (septiembre 2015)

5. Sea la función $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ **definida por** $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$ **.**

a) Halla los extremos absolutos de f **(abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) en el intervalo** $[\frac{1}{e},e]$ **.**

b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f **en el punto de abscisa** $x=e$ **.**

a) $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x) \rightarrow f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x} \rightarrow f'(x)=\frac{-1+x}{x^2}$

$f'(x)=0 \rightarrow -1+x=0 \rightarrow x=1$ → punto crítico

Calculamos la segunda derivada para evaluar el candidato a extremo.

$f'(x)=\frac{-1+x}{x^2} \rightarrow f'(x)=\frac{x^2-(-1+x)2x}{x^4}=\frac{2-x^2}{x^3} \rightarrow f'(1)=1>0$ → mínimo relativo

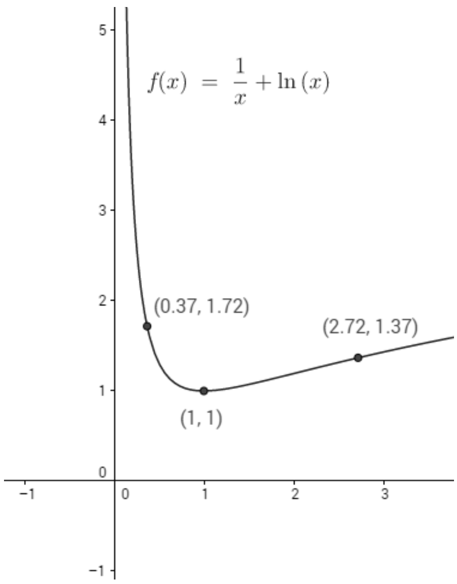
El punto del mínimo es $(1,f(1))=(1,1)$

En el intervalo $[\frac{1}{e},e]$ los extremos toman los siguientes valores en su imagen:

$$f(\frac{1}{e})=\frac{1}{\frac{1}{e}}+\ln(\frac{1}{e})=e+\ln(1)-\ln(e)=e-1\approx 1{,}71$$

$$f(e)=\frac{1}{e}+\ln(e)=\frac{1}{e}+1=\frac{1+e}{e}\approx 1{,}37$$

Comparando los valores de las imágenes, el punto $(1,1)$ es mínimo absoluto, y el punto $(\frac{1}{e},e-1)$ es máximo absoluto dentro del intervalo $[\frac{1}{e},e]$.



b) En el punto $x=e \rightarrow f(e)=\frac{1+e}{e}$. La pendiente de la recta tangente será igual al valor de la derivada en $x=e$.

$$f'(x)=\frac{-1+x}{x^2} \rightarrow m=f'(e)=\frac{e-1}{e^2}$$

Y la ecuación punto-pendiente resulta.

$$\frac{y-\frac{1+e}{e}}{x-e}=\frac{e-1}{e^2} \rightarrow y=x\left(\frac{-1}{e^2}+\frac{1}{e}\right)+\frac{2}{e}$$