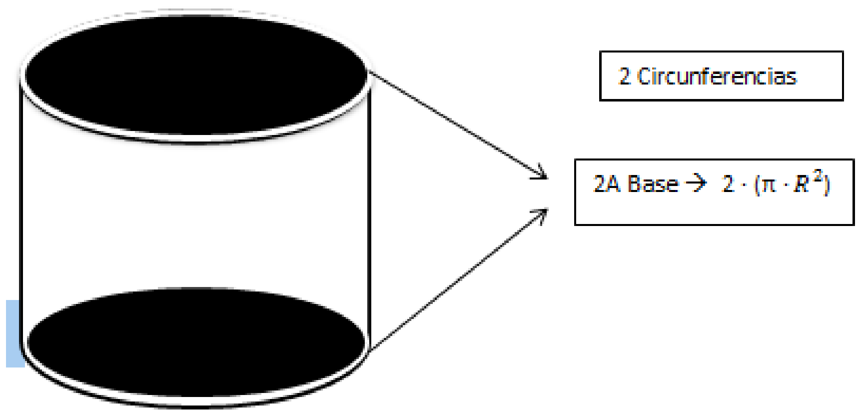
Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso de 1ºBachillerato - Hoja 06 - Problemas 1, 2, 4, 5

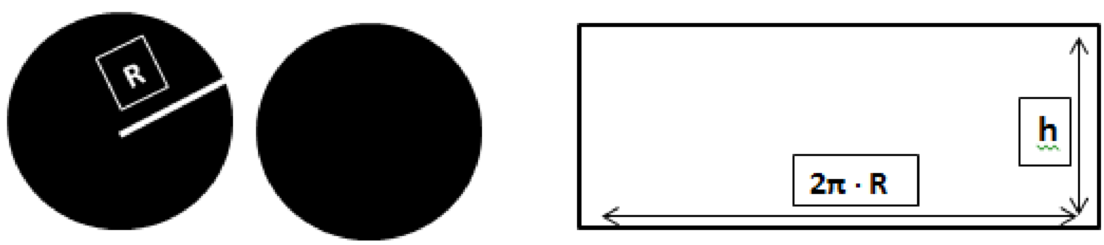
Hoja 6. Problema 1

Resuelto por Ignacio Serrano (septiembre 2014)

1. Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área total igual a 54 m^2. Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que este tenga volumen máximo.



Si descomponemos el cilindro resulta esto…



Área total del cilindro → $A_{Total}=2\pi R h+2(\pi R)^2=54$

Volumen del cilindro → $V_{cilindro}=\pi R^2 h$

La función que debemos maximizar es la función volumen**.** Del área total obtenemos la relación entre la altura h en función del radio R .

$$h=\frac{54-2\pi R^2}{2\pi R}$$

Por lo que el volumen queda expresado en función únicamente del radio.

$$V_{cilindro}=\pi R^2\cdot\frac{54-2\pi R^2}{2\pi R} \quad\rightarrow\quad V_{cilindro}=27R-\pi R^3$$

Para maximizar el volumen, derivamos e igualamos a cero.

$$V'=27-3\pi R^2 \quad , \quad V'=0 \quad\rightarrow\quad R=\frac{3}{\sqrt{\pi}}$$

Comprobamos si es un máximo evaluando la segunda derivada en el punto crítico obtenido.

$$V''=-6\pi R \quad , \quad V''\left(R=\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right)=-18\sqrt{\pi}>0 \quad\rightarrow\quad R=\frac{3}{\sqrt{\pi}} \text{ es un máximo}$$

Solo nos falta obtener el valor de la altura.

$$h=\frac{54-2\pi R^2}{2\pi R}=\frac{6}{\sqrt{\pi}}$$

Hoja 6. Problema 2

Resuelto por Nicolás Carrillo (septiembre 2014)

2. Hallar a, b **y** c **de modo que la función** $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ **alcance en** $x=1$ **un máximo relativo de valor** 2 **, y tenga en** $x=3$ **un punto de inflexión.**

Calculamos la primera y segunda derivada.

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$
$$f''(x)=6x+2a$$

Sustituimos en la primera derivada $x=1$ e igualamos a cero (máximo relativo).

$$f'(1)=3+2a+b \quad \rightarrow \quad 3+2a+b=0$$

Si el valor de la función es 2 para $x=1$:

$$f(x)=2 \; para \; x=1 \quad \rightarrow \quad 2=1+a+b+c \quad \rightarrow \quad 1=a+b+c$$

La segunda derivada evaluada en $x=3$ es igual a 0 , al ser punto de inflexión.

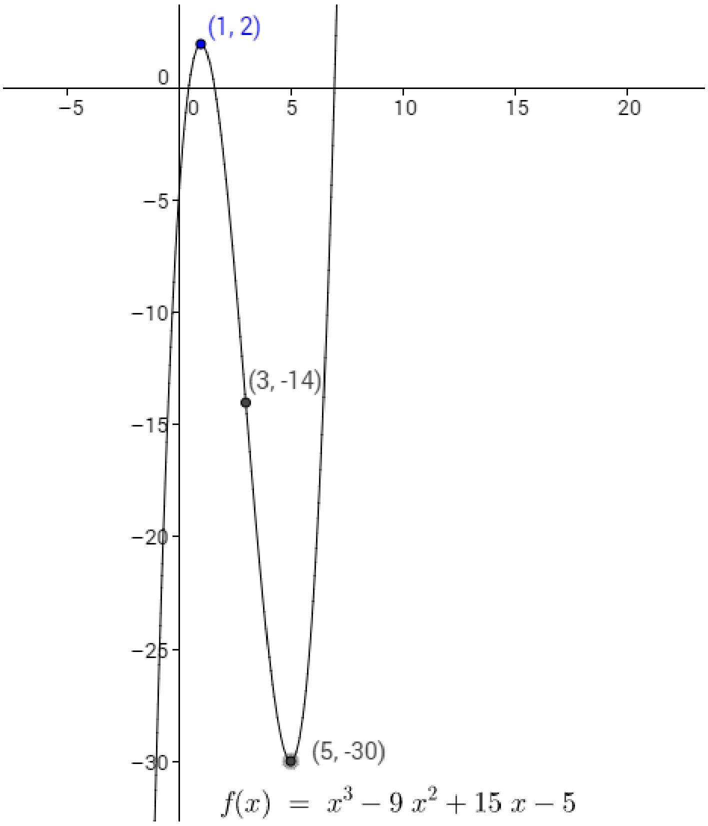
$$f''(3)=0 \quad \rightarrow \quad 0=18+2a \quad \rightarrow \quad a=-9$$

Con el valor $a=-9$, podemos obtener de las ecuaciones anteriores los otros parámetros.

$$b=15 \quad , \quad c=-5$$

Nuestra función resulta → $f(x)=x^3-9x^2+15x-5$

Si representamos la gráfica apreciamos claramente sus extremos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.


(1, 2)
(3, -14)
(5, -30)
0
−5
0
5
10
15
20
−5
−10
−15
−20
−25
−30
$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 5$

Hoja 6. Problema 4

Resuelto por Raquel Juárez (septiembre 2016)

4. Se considera una varilla AB de longitud 1. El extremo A de esta varilla recorre completamente la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-4x-2y+1=0$. La varilla se mantiene en todo momento tangente a dicha circunferencia.

a) Determinar el lugar geométrico descrito por el extremo B de la varilla.

b) Obtener la ecuación cartesiana de dicho lugar geométrico.

a) Obtenemos el centro y el radio de la circunferencia $x^2+y^2-4x-2y+1=0$, comparando con la forma general $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

$(x-x_0)^2=x^2+x_0^2-2x_0x$ → comparando con la circunferencia → $4=2x_0$ → $x_0=2$

$(y-y_0)^2=y^2+y_0^2-2y_0y$ → comparando con la circunferencia → $2=2y_0$ → $y_0=1$

El centro de la circunferencia es $C(2,1)$.

Asimismo, para obtener el radio igualamos los siguientes factores:

$$x_0^2+y_0^2-r^2=1 \rightarrow 4+1-r^2=1 \rightarrow r=2$$

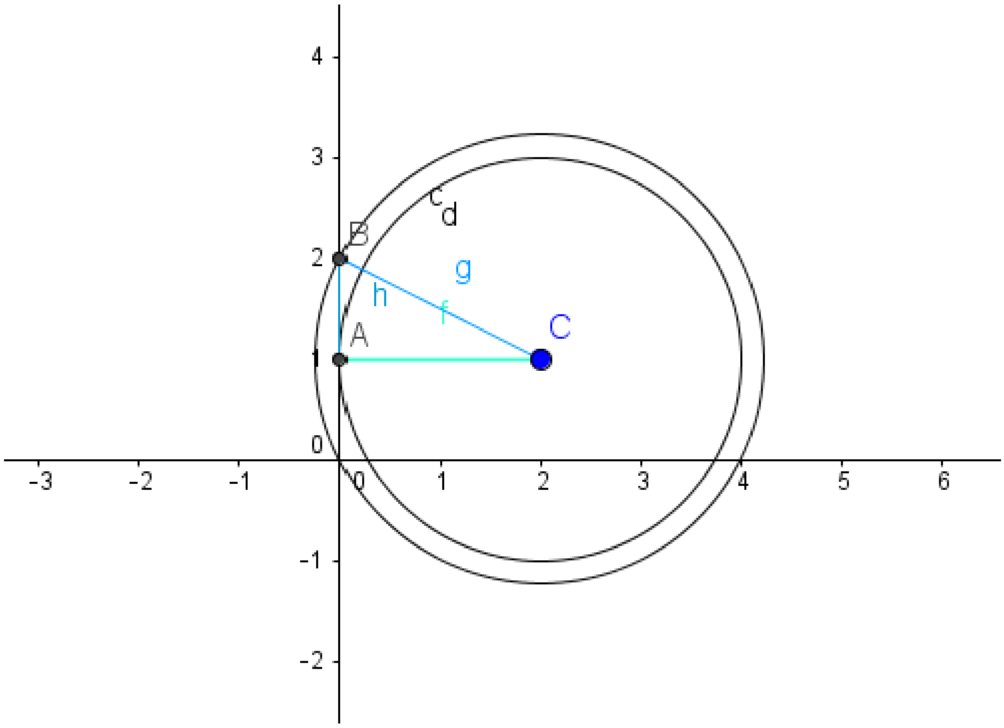
Podemos expresar la cirunferencia de partida de la forma:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=4$$

El extremo A de la varilla toca siempre a esta circunferencia. La varilla siempre permanece tangente a la curva de la circunferencia, por lo que la varilla siempre forma $90º$ con el radio que une el centro C con el extremo A .

El extremo B de la varilla dibujará una circunferencia concéntrica a la del enunciado, y con radio la distancia CB , que calcularemos en el siguiente apartado.

La siguiente gráfica muestra ambas circunferncias concéntricas y el triángulo rectángulo formado por lo vértices ABC (recuerda que la varilla tiene una longitud de 1 unidad).



b) Por Pitágoras es fácil determinar la hipotenusa del triángulo ABC, que coincide con el radio de la circunferencia más exterior.

$$AC^2+AB^2=CB^2 \quad \rightarrow \quad 2^2+1^2=CB^2 \quad \rightarrow \quad CB=\sqrt{5}$$

La ecuación de la circunferencia que dibuja el extremo B resulta:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=5$$

Hoja 6. Problema 5

Resuelto por Inma Esteban García (octubre 2014)

5. Sea $f:[\frac{1}{e},4]\rightarrow \mathbb{R}$ **la función definida por** $f(x)=\begin{cases} x-\ln(x)+a & si \quad \frac{1}{e}\leqslant x\leq 2 \\ bx+1-\ln(2) & si \quad 2<x\leq 4 \end{cases}$ **, donde ln denota la función logaritmo neperiano.**

a) Calcula los valores de a **y** b **para que** $f(x)$ **sea derivable en el intervalo** $(\frac{1}{e},4)$ **.**

b) Para $a=0$ **y** $b=\frac{1}{2}$ **halla los extremos absolutos de** $f(x)$ **(abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).**

a) Como nos dicen que es derivable en el intervalo $(\frac{1}{e},4)$ sabemos que es continua y derivable en $x=2\in(\frac{1}{e},4)$

En los intervalos abiertos la función es continua y derivable. Estudiemos estas condiciones en el punto frontera de los intervalos: $x=2$.

Los límites laterales en $x=2$ deben coincidir y converger a un valor finito, que debe ser igual al valor $f(2)$. Por lo tanto:

$$a=2b-1$$

Por ser derivable, el límite izquierdo en $x=2$ en la derivada debe ser igual al límite derecho en $x=2$ en la derivada. Calculamos la derivada en los intervalos abiertos, y luego aplicamos estas condiciones en el punto $x=2$.

$$f'(x)=\begin{cases} 1-\frac{1}{x} & si \quad \frac{1}{e}<x<2 \\ b & si \quad 2<x<4 \end{cases} \rightarrow f'(2^-)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad , \quad f'(2^+)=b \rightarrow b=\frac{1}{2} \rightarrow a=0$$

b) La función a estudiar es $f(x)=\begin{cases} x-\ln(x) & si \quad \frac{1}{e}\leq x\leq 2 \\ \frac{x}{2}+1-\ln(2) & si \quad 2<x\leq 4 \end{cases}$.

Y su derivada es $f'(x)=\begin{cases} 1-\frac{1}{x} & si \quad \frac{1}{e}<x\leq 2 \\ \frac{1}{2} & si \quad 2\leq x<4 \end{cases}$, donde hemos cerrado el intervalo a izquierda y derecha de $x=2$ ya que en el apartado anterior hemos demostrado que para $a=0$ y $b=\frac{1}{2}$ la función es derivable en ese punto.

Vamos a comprobar si es derivable en $x=\frac{1}{e}$ por la derecha (ya que a la izquierda de ese punto no está definida la función) y en $x=4$ por la izquierda (ya que a la derecha de ese punto no está definida la función). Recordando que una función es derivable por la izquierda (o por la derecha) en un punto si existe y es finito el valor de la derivada por la izquierda (o por la derecha) en ese punto.

$$f'(\frac{1}{e}^{+})=1-e \quad , \quad f'(4^{-})=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad f'(x)=\begin{cases} 1-\frac{1}{x} & si \quad \frac{1}{e}\leq x\leq 2 \\ \frac{1}{2} & si \quad 2\leq x\leq 4 \end{cases}$$

Los extremos absolutos de la función en el intervalo cerrado $[\frac{1}{e},4]$ se alcanza en aquellos puntos donde la función obtenga el mayor valor dentro del intervalo o el menor valor. Y esto puede ocurrir en los extremos del intervalo y en los puntos críticos (valores que anulan la primera derivada).

$f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}-\ln(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}+1\simeq 1{,}37$ → Punto $(\frac{1}{e},\ 1{,}37)$

$f(4)=2+1-\ln(2)=3-\ln(2)\simeq 2{,}31$ → Punto $(4,\ 2{,}31)$

Si igualamos la derivada a 0 obtenemos → $f'(x)=0$. Es decir:

Intervalo $\frac{1}{e}\leq x<2 \quad \rightarrow \quad 1-\frac{1}{x}=0 \quad \rightarrow \quad x=1 \quad \rightarrow \quad f(1)=1-\ln(1)=1$ → Punto $(1,1)$

Intervalo $2 \leq x \leq 4$ $\rightarrow$ $\frac{1}{2}=0$ → Absurdo matemático → No hay punto crítico.

Conclusión: mínimo absoluto en $(1,1)$ y máximo absoluto en $(4,\ 2{,}31)$.