

Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso de 1ºBachillerato - Hoja 05 - Problemas 1, 2, 3, 5

Hoja 5. Problema 1

Resuelto por Andrés Pineda (septiembre 2014)

1. Sea $g(x) = \frac{mx^3}{(x-n)^2}$, con $x \neq n$.

a) Halla m y n sabiendo que la recta $y = 2x - 4$ es una asíntota de la gráfica de $g(x)$.

b) Determina si la gráfica de $g(x)$ es simétrica respecto al origen.

a) Si la recta $y = 2x - 4$ es una asíntota oblicua, la convergencia de los dos siguientes límites debe ser:

$$\text{pendiente} = 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = m \rightarrow m = 2$$

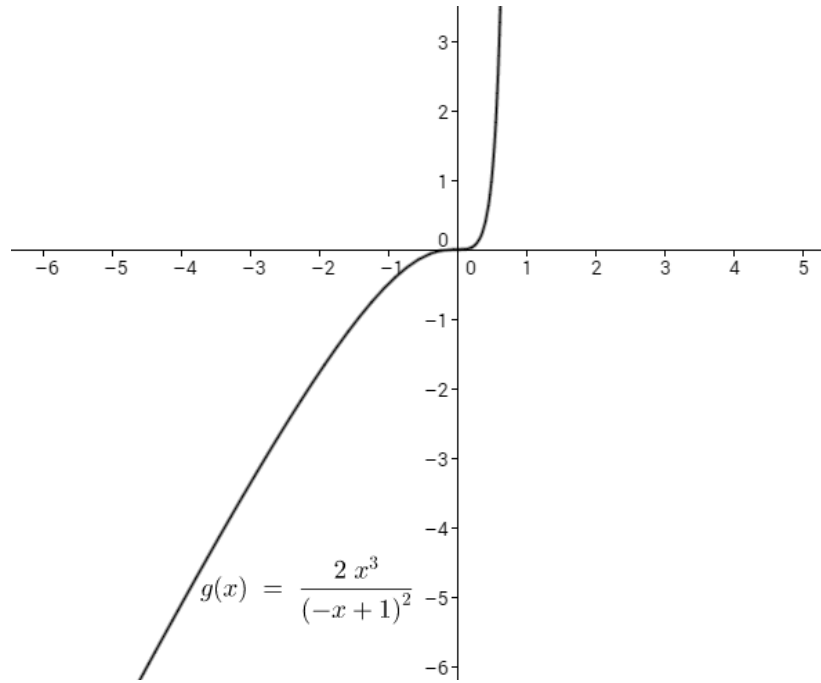
$$\text{ordenada en el origen} = -4 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - 2x) = n \rightarrow 4n = -4 \rightarrow n = -1$$

La función resulta $g(x) = \frac{2x^3}{(x+1)^2}$

b) Una función $g(x)$ es impar, es decir, simétrica respecto al origen si $g(x) = -g(-x)$.

$$g(x) = \frac{2x^3}{(x+1)^2}, \quad g(-x) = \frac{-2x^3}{(-x+1)^2} \rightarrow g(x) \neq -g(-x) \rightarrow \text{No es impar}$$

La gráfica de la función confirma que la función no es impar.



Hoja 5. Problema 2

Resuelto por Javier Bermúdez (septiembre 2015)

2. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Se sabe que un punto de inflexión de la gráfica tiene abscisa $x=1$ y que $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x=2$ de valor -9 . Calcula a , b y c .

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow f''(x) = 6x + 2a$$

Punto de inflexión en $x=1 \rightarrow f''(1) = 6 + 2a$, $f''(1) = 0 \rightarrow 6 + 2a = 0$

Mínimo relativo en $x=2 \rightarrow f'(2) = 12 + 4a + b$, $f'(2) = 0 \rightarrow 12 + 4a + b = 0$

Punto de la función $(2, -9) \rightarrow f(2) = 8 + 4a + 2b + c$, $f(2) = -9 \rightarrow 8 + 4a + 2b + c = -9$

Formamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, de soluciones:

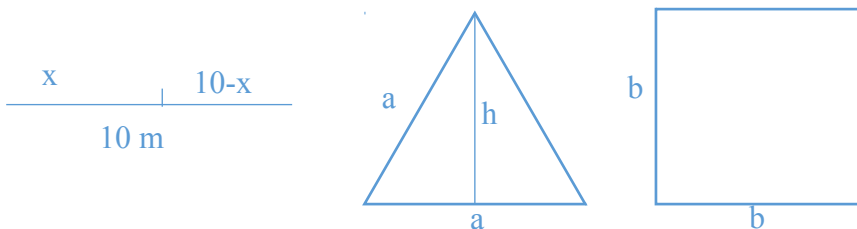
$$a = -3, b = 0, c = -5$$

Hoja 5. Problema 3

Resuelto por Ana Jerónimo (septiembre 2014)

3. Un alambre de 10 metros de longitud se divide en dos trozos. Con uno de ellos se forma un triángulo equilátero y con el otro un cuadrado. Halla la longitud de dichos trozos para que la suma de las áreas sea mínima.

Nos ayudamos del siguiente dibujo.



Si con el trozo de alambre de longitud x construimos el triángulo equilátero (tres lados iguales), deducimos $\rightarrow a = \frac{x}{3}$

Si con el trozo de alambre de longitud $10-x$ construimos el cuadrado (cuatro lados iguales), deducimos $\rightarrow b = \frac{(10-x)}{4}$

La función que debemos minimizar es la suma de las áreas de ambas figuras.

$$A = A_{\text{triángulo}} + A_{\text{cuadrado}}$$

El área del triángulo es $A_{\text{triángulo}} = \frac{a \cdot h}{2}$. La altura h la calculamos con el teorema de Pitágoras.

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \rightarrow A_{\text{triángulo}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Sustituyendo } a = \frac{x}{3} \rightarrow A_{\text{triángulo}} = \frac{x^2\sqrt{3}}{36}$$

El área del cuadrado es $A_{\text{cuadrado}} = b^2$. Si $b = \frac{(10-x)}{4} \rightarrow A_{\text{cuadrado}} = \frac{(10-x)^2}{16}$

La suma de ambas áreas da lugar a la función a minimizar.

$$A = \frac{x^2\sqrt{3}}{36} + \frac{(10-x)^2}{16}$$

$$A' = \frac{x\sqrt{3}}{18} - \frac{10-x}{8} = \frac{4x\sqrt{3}-90+9x}{72} = \frac{x(4\sqrt{3}+9)-90}{72}, \quad A'=0 \rightarrow x(4\sqrt{3}+9)-90=0$$

$$x = \frac{90}{4\sqrt{3}+9}$$

Ahora, comprobamos si este resultado es el que minimiza las áreas hallando la segunda derivada y verificando que al evaluar la segunda derivada en nuestro valor, el resultado es mayor que cero.

$$A'' = \frac{4\sqrt{3}+9}{72} > 0 \rightarrow x = \frac{90}{4\sqrt{3}+9} \text{ es un mínimo de la función}$$

Los trozos solución a nuestro problema son $x = \frac{90}{4\sqrt{3}+9}$ y $10-x = 10 - \frac{90}{4\sqrt{3}+9} = \frac{40\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+9}$, con unidad de distancia el metro.

Hoja 5. Problema 5

Resuelto por Carlos Pareja (octubre 2014)

5. Calcular la base y la altura de un triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Consideramos un triángulo que descansa sobre su base x (lado desigual del triángulo isósceles) y con los otros dos lados iguales de longitud y . La altura del triángulo es h .

El enunciado nos da el perímetro del triángulo (suma de todos los lados).

$$P=8 \text{ u} \rightarrow 2y+x=8 \rightarrow y=\frac{8-x}{2}$$

El área del triángulo es la función a maximizar $\rightarrow A=\frac{x \cdot h}{2}$

Debemos expresar la altura h en función de x , para tener el área expresada según una única variable x .

El triángulo isósceles podemos dividirlo en dos triángulos rectángulos, de hipotenusa y y con catetos de longitud h y $\frac{x}{2}$. Por Pitágoras:

$$y^2=h^2+\frac{x^2}{2^2} \rightarrow h=\sqrt{y^2+\frac{x^2}{4}}$$

Recordamos que $y=\frac{8-x}{2} \rightarrow h=\sqrt{\frac{64-16x}{4}}=\sqrt{16-4x}$

Y este valor de la altura lo llevamos a la ecuación del área $\rightarrow A=\frac{x \cdot \sqrt{16-4x}}{2}=\sqrt{4x^2-x^3}$

Para que el área sea máxima tenemos que hacer la derivada, igualar a cero y justificar si existe un máximo relativo.

$$A'(x) = \frac{8x - 3x^2}{2 \cdot \sqrt{4x^2 - x^3}}, \quad A' = 0 \rightarrow x = 0, \quad x = 8/3$$

Tienen sentido distancias positivas, por lo que trabajamos con el punto crítico $x = \frac{8}{3}$.

Debemos considerar también el dominio de la función:

$$A = \sqrt{4x^2 - x^3} \rightarrow \text{Dom}(A) = x \in \mathbb{R} / x \leq 4$$

Evaluamos en $(0, \frac{8}{3}) \rightarrow A'(1) > 0 \rightarrow A$ creciente

Evaluamos en $(\frac{8}{3}, 4) \rightarrow A'(3) < 0 \rightarrow A$ decreciente

Por lo tanto tenemos un máximo relativo en $x = \frac{8}{3} \rightarrow y = \frac{8}{3}$, $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

Esta solución genera un área máxima de $A = \frac{16\sqrt{3}}{9} u^2$.