Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso de 1ºBachillerato - Hoja 03 - Todos resueltos

Hoja 3. Problema 1

Resuelto por Andrés Pineda (septiembre 2014)

1. Expresa en función de x **y simplifica:**

$$\frac{sen(2\pi-x)-\cos(-x)sen(\frac{\pi}{2}+x)+1}{sen(\pi-x)}\cdot(1+senx)$$

Para resolver este problema emplearemos las formulas de la adición:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

Y recordamos:

$$\sin(2\pi)=0$$
$$\sin(\pi)=0$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$
$$\cos(2\pi)=1$$
$$\cos(\pi)=-1$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

Resultando:

$$\frac{-\sin(x)-\cos(-x)\cdot\cos(x)+1}{\sin(x)}\cdot(1+\sin(x))$$

La función coseno es par → $\cos(-x)=cos(x)$ → Por lo tanto:

$$\frac{-\sin(x)-\cos(x)\cdot\cos(x)+1}{\sin(x)}\cdot(1+\sin(x))$$

$$\frac{-\sin(x)-cos^2(x)+1}{\sin(x)}\cdot(1+\sin(x))$$

Por la relación fundamental de trigonometría → $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$ → Resulta:

$$\frac{-\sin(x)-1+sin^2(x)+1}{\sin(x)}\cdot(1+\sin(x)) \rightarrow \frac{-\sin(x)+sin^2(x)}{\sin(x)}\cdot(1+\sin(x))$$

$$(-1+\sin(x))\cdot(1+\sin(x)) \rightarrow \sin^2(x)-1 \rightarrow -\cos^2(x)$$

Como queríamos demostrar.

Hoja 3. Problema 2

Resuelto por Pablo Lupiañez (septiembre 2015)

2. a) Determinar los extremos relativos de la función $f(x)=x^2-4x+2$ **. Dibujar su gráfica.**

b) Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ **que pasan por el punto** $P(3,-5)$ **.**

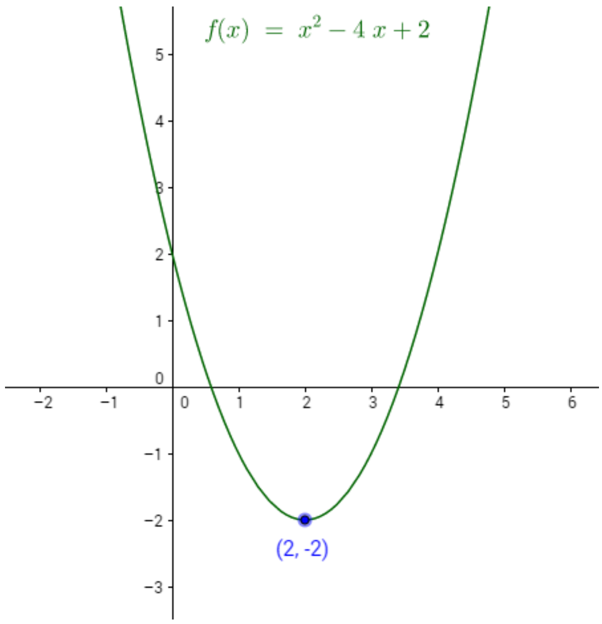
a) La condición necesaria de extremos relativo es anular la primera derivada.

$$f(x)=x^2-4x+2 \rightarrow f'(x)=2x-4 \quad , \quad f'(x)=0 \rightarrow 2x-4=0 \rightarrow x=2$$

Evaluamos la segunda derivada en el punto crítico $x=2$.

$f'(x)=2x-4 \rightarrow f''(x)=2>0 \rightarrow x=2$ es un mínimo relativo

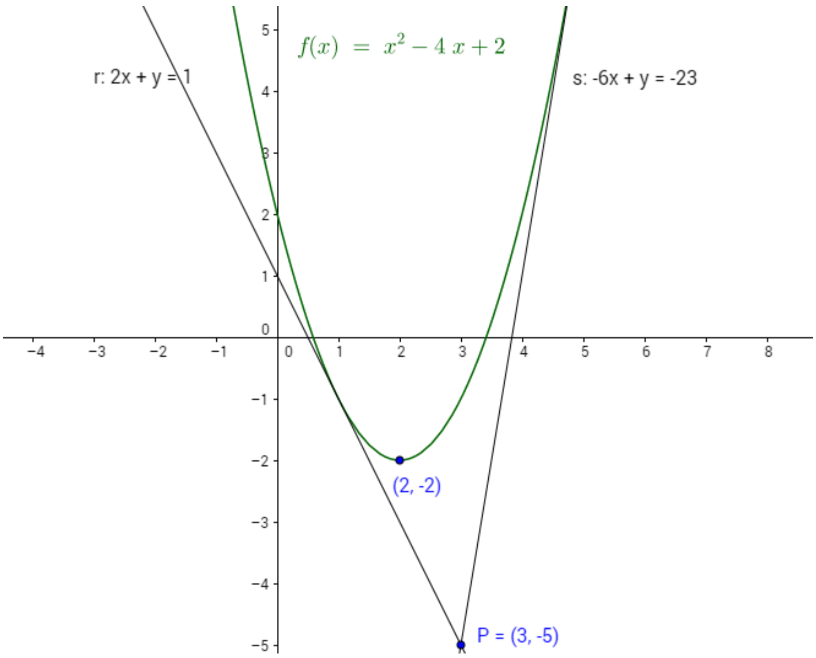
Tenemos el mínimo en el punto $(2,f(2))=(2,-2)$, como vemos en la gráfica.



b) El punto $P(3,-5)$ no pertenece a la función, como podemos comprobar.

$$f(x)=x^2-4x+2 \rightarrow f(3)=9-12+2=-1\neq-5$$

Por lo tanto, $P(3,-5)$ es un punto externo a la parábola. La siguiente imagen nos muestra, gráficamente, las dos rectas tangentes a la función que pasan por $P(3,-5)$.



¿Cómo calcularlas analíticamente?

Necesitamos el conjunto de rectas que pasan por el punto $P(3,-5)$. Es lo que se conoce como haz de rectas. Usando la ecuación punto-pendiente, podemos obtener este haz de recta en función de la pendiente m .

$$m=\frac{y+5}{x-3}$$

De todas la rectas posibles que pasan por $P(3,-5)$, necesitamos las que cortan de manera tangente a la función $f(x)=x^2-4x+2$.

Supongamos que una de esas rectas corta a la función en el punto $(x_0, f(x_0))=(x_0, x_0^2-4x_0+2)\in f$. La pendiente de la recta tangente a la función en un punto, coincide con el valor de la derivada de la función en ese punto. Es decir:

$$m=f'(x_0) \quad \rightarrow \quad m=2x_0-4$$

Es decir, por un lado tenemos el haz de rectas → $m=\dfrac{y+5}{x-3}$.

Por otro lado tenemos la relación que debe cumplir la pendiente para que la recta sea tangente a la función → $m=2x_0-4$.

Igualamos ambos valores de la pendiente, sabiendo que en $m=\dfrac{y+5}{x-3}$ necesitamos $x=x_0$, $y=f(x_0)=x_0^2-4x_0+2$ para forzar que la recta pase por el punto $(x_0, f(x_0))\in f$.

$$\frac{x_0^2-4x_0+2+5}{x_0-3}=2x_0-4$$

Llegamos a una ecuación con una sola incógnita: x_0 . Resolvamos.

$$\frac{x_0^2-4x_0+2+5}{x_0-3}=2x_0-4 \quad \rightarrow \quad x_0^2-4x_0+7=2x_0^2-10x_0+12 \quad \rightarrow \quad -x_0^2+6x_0-5=0$$

$$x_0=\frac{-6\pm\sqrt{36-20}}{-2} \quad \rightarrow \quad x_0=1 \quad , \quad x_0=5$$

Tenemos dos soluciones.

Si $x_0=1 \quad \rightarrow \quad f(1)=1-4+2=-1 \quad \rightarrow \quad m=\dfrac{-1+5}{1-3}=-2 \quad \rightarrow \quad r:-2=\dfrac{y+5}{x-3} \quad \rightarrow \quad r: y=-2x+1$

Si $x_0=5 \quad \rightarrow \quad f(5)=25-20+2=7 \quad \rightarrow \quad m=\dfrac{7+5}{5-3}=6 \quad \rightarrow \quad s:6=\dfrac{y+5}{x-3} \quad \rightarrow \quad s: y=6x-23$

Hoja 3. Problema 3

Resuelto por María Márquez (septiembre 2014)

3. Sea $P(x)$ un polinomio de grado 4 tal que:

- $P(x)$ es una función par.

- Dos de sus raíces son $x=1$ y $x=\sqrt{5}$.

- $P(0)=5$.

Se pide:

a) Hallar sus puntos de inflexión.

b) Dibujar su gráfica

a) Dos de sus raíces son $x=1$ y $x=\sqrt{5}$, y como es una función par podemos expresarla de la forma:

$$P(x)=(x+\sqrt{5})(x+1)(x-1)(x-\sqrt{5})$$
$$(x^2+x+x\sqrt{5}+\sqrt{5})(x-1)(x-\sqrt{5})$$
$$\left(x^3-x^2+x^2-x+x^2\sqrt{5}-x\sqrt{5}+x\sqrt{5}-\sqrt{5}\right)(x-\sqrt{5})$$
$$\left(x^3-x+x^2\sqrt{5}-\sqrt{5}\right)(x-\sqrt{5})$$
$$x^4-x^3\sqrt{5}-x^2+x\sqrt{5}+x^3\sqrt{5}-5x^2-x\sqrt{5}+5$$
$$P(x)=x^4-6x^2+5$$

Derivamos e igualamos a cero para obtener los puntos críticos.

$$P'(x)=4x^3-12x$$
$$4x^3-12x=0 \rightarrow x\left(4x^2-12\right)=0 \rightarrow 4x\left(x^2-3\right)=0$$
$$x=0$$
$$x=-\sqrt{3}$$
$$x=\sqrt{3}$$

Si evaluamos $P(x)$ en los puntos críticos, obtenemos la ordenada correspondiente de los extremos → $(0,5),(-\sqrt{3},-4),(\sqrt{3},-4)$.

Hacemos la segunda derivada para determinar si estamos ante máximos o mínimos relativos.

$$P''(x)=12x^2-12$$
$$P''(0)=-12<0 \rightarrow \textit{máximo en } (0,5)$$
$$P''(\pm\sqrt{3})=12(\pm\sqrt{3})^2-12=24>0 \rightarrow \textit{mínimo en } (\sqrt{3},-4) \ y \ (-\sqrt{3},\ -4)$$

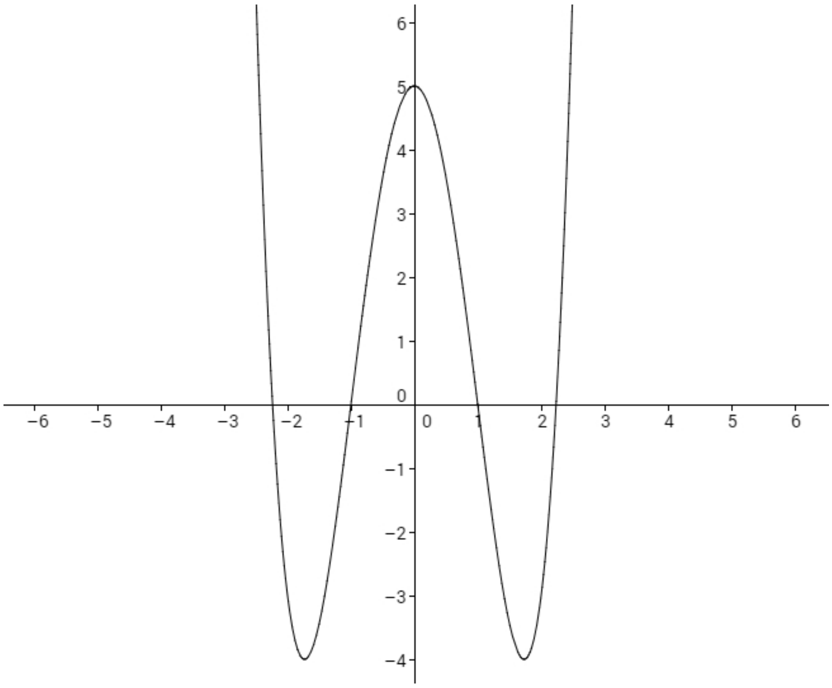
Y los puntos que anulan la segunda derivada son los candidatos a puntos de inflexión.

$$P''(x)=\ 12x^2-12=0 \rightarrow x=\pm 1$$

Con la tercera derivada confirmamos que son puntos de inflexión.

$$P'''(x)=24x$$
$$P'''(-1)\neq 0$$
$$P'''(1)\neq 0$$

Los puntos $(-1,0),(1,0)$ son puntos de inflexión (además de raíces del polinomio).



Hoja 3. Problema 4

Resuelto por Ana Jerónimo Zárate (septiembre 2014)

3. Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Analizamos los datos que nos da el problema:

- ✓ x = edad de la madre
- ✓ y = edad del hermano mayor
- ✓ z = edad del hermano menor

A continuación buscaremos ecuaciones que nos ayuden a resolver las incógnitas:

- ✓ Sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento → $x-14=5\cdot[(y-14)+(z-14)]$
- ✓ Sabiendo que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento → $x+10=(y+10)+(z+10)$
- ✓ Y por último, con el dato de que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años, sacamos la ecuación → $z+(x-y)=42$

Simplificando y ordenando las tres ecuaciones deducimos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x-5y-5z=-126 \\ x-y-z=10 \\ x-y+z=42 \end{cases}$$

Tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que resolvemos por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x-5y-5z=-126 \\ x-y-z=10 \\ x-y+z=42 \end{cases}$$ → Intercambiamos el orden de las dos primeras filas

$$\begin{cases} x-y-z=10 \\ x-5y-5z=-126 \\ x-y+z=42 \end{cases} \rightarrow \quad F'_2=F_2-F_1 \quad , \quad F'_3=F_3-F_1$$

$$\begin{cases} x-y-z=10 \\ x-4y-4z=-136 \\ 2z=32 \end{cases} \rightarrow \quad 2z=-32 \quad \rightarrow \quad z=16 \quad \rightarrow \quad y=18 \quad , \quad x=44$$

Solución: Madre 44 años, hijo mayor 18 años e hijo menor 16 años.

Hoja 3. Problema 5

Resuelto por Pedro Talavera Cejudo (octubre 2014)

5. Sea la función definida por $f(x)=\frac{x}{\ln x}$ **para** $x>0$ **,** $x\neq 1$ **.**

a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de $f(x)$ **.**

b) Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=e$ **.**

a) Asíntota Vertical → $\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)=-\infty$, $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)=+\infty$

Asíntota Horizontal → $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)=\infty$ → No existen asíntotas horizontales

Asíntota Oblicua → $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{\ln(x)}}{x}\right)=0$ → $m=0$ → no existen asíntotas oblicuas

b) El punto $x=e$ evaluado en la función da lugar a → $f(e)=\frac{e}{\ln(e)}=e$.

La pendiente de la recta tangente será la derivada de la función en el punto.

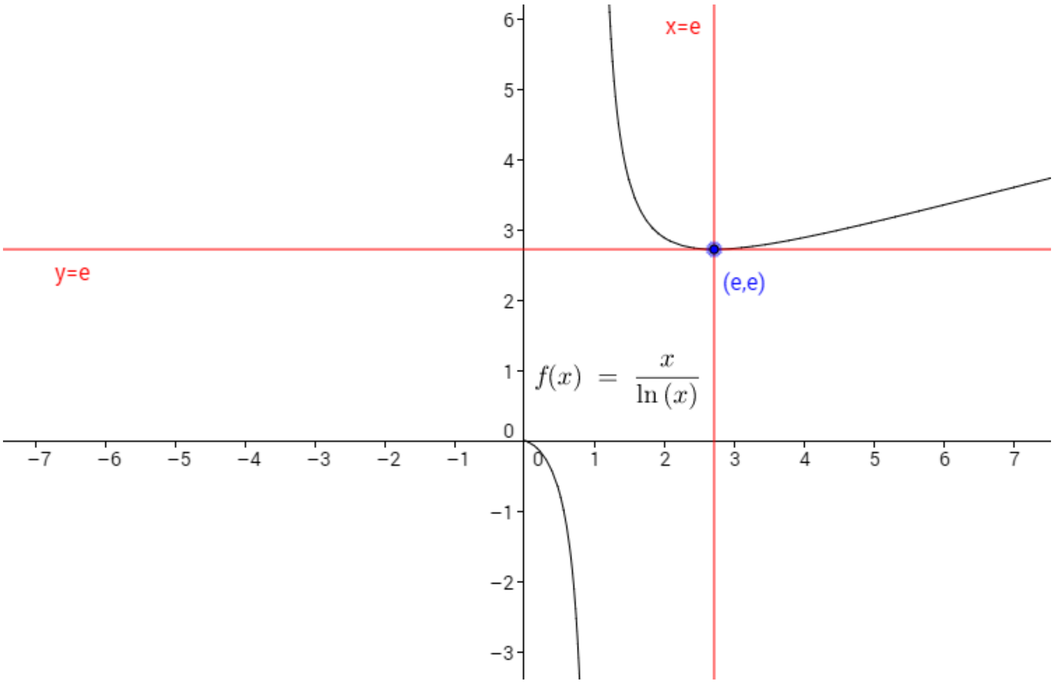
$$f'(x)=\frac{\ln(x)-1}{(lnx)^2}$$

$$f'(e)=0 \rightarrow x=e \quad es\, un\, extremo\, relativo \rightarrow pendiente\, de\, la\, recta\, tangente=0$$

Usando la ecuación punto pendiente de la recta tenemos la recta tangente.

$$\frac{y-e}{x-e}=0 \rightarrow y=e$$

Y la recta normal a $y=e$ es perpendicular a ella. Por lo tanto → $x=e$.


x=e
y=e
(e,e)
$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$