Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso de Matemáticas I - Hoja 27 - Todos resueltos

Hoja 27. Problema 1

1. a) Calcula $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{tg(x)}\right)$ **.**

b) Obtener en forma explícita la recta tangente a la función $f(x)=e^x\cdot\ln(x)+2x$ **en** $x=1$ **.**

c) Obtener en forma explícita la recta tangente a la función $f(x)=\frac{x(2x+1)}{\sqrt{x+2}}$ **en** $x=2$ **.**

a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{tg(x)}\right)=\frac{0}{0}$ → Indeterminación → L'Hôpital → $\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{1+tg^2(x)}\right)=\frac{0}{1}=0$

b) $f(x)=e^x\cdot\ln(x)+2x \rightarrow f(1)=e\cdot\ln(1)+2=2$ → punto $(1,2)$

$f(x)=e^x\cdot\ln(x)+2x \rightarrow f'(x)=e^x\cdot\ln(x)+\frac{e^x}{x}+2 \rightarrow f'(1)=e\cdot\ln(1)+\frac{e}{1}+2=e+2 \rightarrow$ pendiente $m=e+2$

Planteamos la ecuación explícita de la recta:

$$y=mx+n \rightarrow y=(e+2)x+n$$

Obtenemos n sustituyendo en la recta el punto $(1,2) \rightarrow 2=(e+2)1+n \rightarrow n=-e \rightarrow y=(e+2)x-e$

c) Ver el vídeo solución publicado en la web de la asignatura:

https://www.youtube.com/watch?v=8-GnPGoHBHw

Hoja 27. Problema 2

2. a) Estudia y representa gráficamente $f(x)=x^2-4x+2$ **.**

b) Sea $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ **. Estudia el dominio, las asíntotas y los extremos relativos.**

a) $Dom(f)=\mathbb{R}$ $\rightarrow$ por ser polinómica.

La función no posee asíntotas de ningún tipo, por ser polinómica.

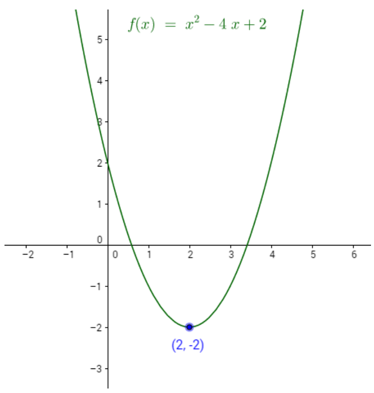
La función no es par ni impar, ni presenta periodicidad.

$f(x)=x^2-4x+2 \rightarrow f'(x)=2x-4$, $f'(x)=0 \rightarrow x=2$ $\rightarrow$ punto crítico.

Función $f(x)$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$
Intervalos	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(0)<0$	$f'(10)>0$

La función presenta un mínimo relativo en el punto $(2,-2)$. Es estrictamente decreciente en $(-\infty,2)$ y estrictamente creciente en $(2,+\infty)$.

$f'(x)=2x-4 \rightarrow f''(x)=2$, $f''(x)=0 \rightarrow 2\neq 0$ $\rightarrow$ no hay punto de inflexión.



b) $f(x)=\frac{x}{\ln x}$ → $Dom(f)=(0,+\infty)-\{1\}$ → Así garantizamos valores positivos dentro del logaritmo y no dividir por cero.

Asíntota Vertical → $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)=0$ → No hay asíntota vertical en $x=0$

Asíntota Vertical → $\lim_{x\to 1-}\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)=-\infty$, $\lim_{x\to 1+}\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)=+\infty$ → A.V. en $x=1$

Asíntota Horizontal → $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)=\infty$ → en el infinito el polinomio es más potente que el logaritmo → no existen asíntotas horizontales

Asíntota Oblicua → $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{\ln(x)}}{x}\right)=0$ → $m=0$ → no existen asíntotas oblicuas

$f(x)=\frac{x}{\ln x}$ → $f'(x)=\frac{\ln(x)-1}{(lnx)^2}$, $f'(x)=0$ → $\ln(x)=1$ → $x=e$ → punto crítico

Evaluamos la primera derivada alrededor del punto crítico, recordando que en $x=1$ tenemos una asíntota vertical.

Función $f(x)$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$
Intervalos	$(1,e)$	$(e,+\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(2)<0$	$f'(10)>0$

Tenemos un mínimo relativo en el punto (e,e) .

Hoja 27. Problema 3

3. Sea la función $f(x)=\ln(x^3-4x)$ **.**

a) Determina el dominio de la función.

b) Halla la ecuación explícita de la recta tangente en el punto $x=-1$ **.**

a) Necesitamos que el argumento del logaritmo sea positivo. Es decir:

$$x^3-4x>0 \;\rightarrow\; x(x^2-4)>0 \;\rightarrow\; x(x+2)(x-2)>0$$

Las raíces de la expresión a la izquierda de la inecuación son: $x=-2,0,2$. Evaluamos en los siguientes intervalos:

$(-\infty,-2)$ → si $x=-10$, $-10(-10+2)(-10-2)<0$ → No pertenece al dominio

$(-2,0)$ → si $x=-1$, $-1(-1+2)(-1-2)>0$ → Sí pertenece al dominio

$(0,2)$ → si $x=1$, $1(1+2)(1-2)<0$ → No pertenece al dominio

$(2,+\infty)$ → si $x=10$, $10(10+2)(10-2)>0$ → Sí pertenece al dominio

$$Dom(f)=(-2,0)\cup(2,+\infty)$$

b) $f(x)=\ln(x^3-4x)$, $x=-1$ → $f(-1)=\ln(-1+4)=\ln(3)$ → $(-1,\ \ln(3))$

$f(x)=\ln(x^3-4x)$ → $f'(x)=\dfrac{3x^2-4}{x^3-4x}$ → $f'(-1)=\dfrac{3-4}{-1+4}=\dfrac{-1}{3}$ → pendiente $m=\dfrac{-1}{3}$

La ecuación punto-pendiente resulta:

$$\frac{y-\ln(3)}{x+1}=\frac{-1}{3} \;\rightarrow\; y=\frac{-x}{3}+\ln(3)-\frac{1}{3}$$

Hoja 27. Problema 4

4. Sea la función $f(x)=x^2-8\cdot\ln(x)$ definida en $f:1\rightarrow+\infty$. Estudia intervalos de crecimiento y decrecimiento, calcula los extremos relativos de la función y obtén el valor de la ordenada en cada extremo.

$$f(x)=x^2-8\cdot\ln(x) \;\rightarrow\; f'(x)=2x-\frac{8}{x} \;\rightarrow\; f'(x)=\frac{2x^2-8}{x}$$

$f'(x)=0 \;\rightarrow\; x=\pm 2$ $\rightarrow$ puntos críticos

Recordamos que la función está definida en $f:1\rightarrow+\infty$, por lo que solo tomamos como punto crítico $x=2$.

Evaluamos la derivada alrededor de este punto crítico.

Función $f(x)$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$
Intervalos	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(\frac{3}{2})<0$	$f'(10)>0$

En $x=2$ tenemos un mínimo relativo (punto $(2,\ 4-8\ln(2))$)

Estrictamente decreciente en $(1,2)$. Estrictamente creciente en $(2,+\infty)$.

Hoja 27. Problema 5

5. a) La derivada de una función es negativa para valores $x<1$ y positiva para valores $x>1$. ¿Podemos afirmar que en $x=1$ tenemos un mínimo relativo? Razona tu respuesta y escribe la ecuación de una función que justifique tu respuesta.

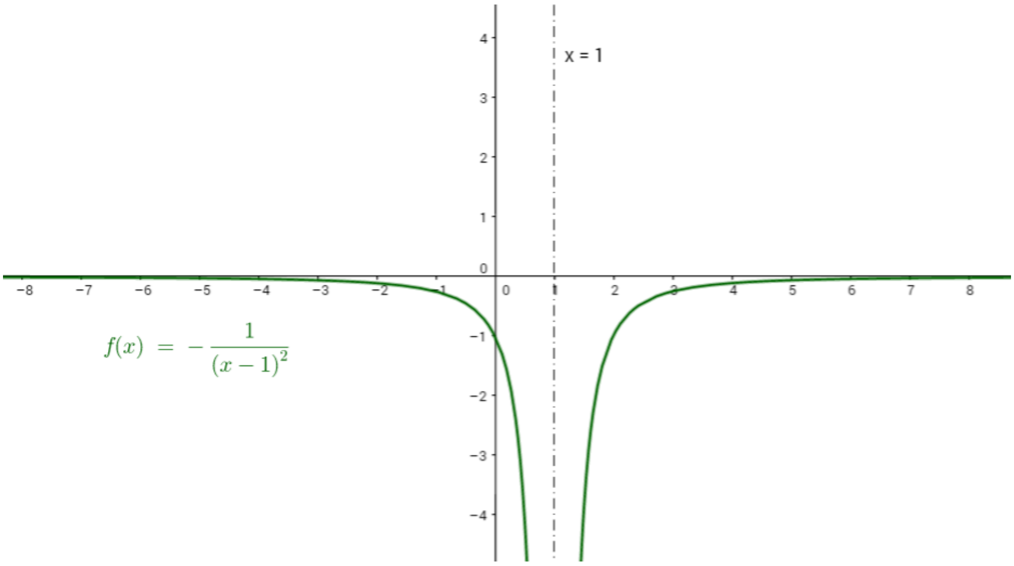
b) Calcula $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{tg(x)}\right)$ **.**

c) Sea $f(x)=\left\{\begin{matrix}\frac{sen(x)}{x}+2 & si \quad x\neq 0\\ k & si \quad x=0\end{matrix}\right\}$ **. Calcula** k **para que** $f(x)$ **sea continua en** $x=0$ **.**

a) No podemos afirmarlo, ya que si la función no está definida en $x=1$ (por ejemplo, en una asíntota vertical) no tendremos extremos relativo. Por ejemplo:

$$f(x)=\frac{-1}{(x-1)^2} \rightarrow f'(x)=\frac{2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3} \rightarrow f'(0)<0 \quad , \quad f'(10)>0$$

$Dom(f)=\mathbb{R}-\{1\}$



b) $\lim_{x \to 0} (\frac{1-\cos(x)}{tg(x)}) = \frac{0}{0}$ → Indeterminación → L'Hôpital

$\lim_{x \to 0} (\frac{sen(x)}{1+tg^2(x)}) = \frac{0}{1} = 0$

c) Para que una función sea continua en $x = x_0$ deben satisfacerse tres condiciones:

- Estar definida la función en el punto → $\exists f(x_0)$
- Existir los límites laterales, ser finitos y ser iguales → $\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = \lim_{x \to x_{0+}} f(x) = L$
- Coincidir el límite con el valor de la función en el punto → $f(x_0) = L$

Aplicamos estas condiciones a nuestra función, con $x_0 = 0$.

$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (\frac{sen(x)}{x} + 2) = \lim_{x \to 0-} (\frac{sen(x) + 2x}{x}) = \frac{0}{0}$ → Indeterminación

Aplicamos L'Hôpital en la indeterminación y derivamos numerador y denominador.

$\lim_{x \to 0-} (\frac{sen(x) + 2\mathrm{x}}{x}) = \lim_{x \to 0-} (\frac{\cos(x)+2}{1}) = 3$

Para el límite lateral derecho obtenemos idéntico resultado. Por lo tanto, para que la función sea continua en $x = 0$, debe cumplirse $k = 3$.

Hoja 27. Problema 6

6. Estudia las asíntotas y los extremos relativos de la función $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ **.**

No existen asíntotas verticales, ya que el denominador nunca se anula.

Asíntota horizontal → $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=1$ → por ser cociente de polinomios del mismo grado, el límite converge al cociente de coeficientes que acompañan a la máxima potencia x^2 .

Existe asíntota horizontal en $y=1$, por lo que no existe oblicua.

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2+1)-(x^2+x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x+x^2+1-2x^3-2x^2-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \quad , \quad f'(x)=0 \;\rightarrow\; x=\pm 1$$

Evaluamos la derivada a ambos lados de los puntos críticos.

Función $f(x)$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\downarrow$
Intervalos	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(-10)<0$	$f'(0)>0$	$f'(-10)<0$

En $x=-1$ tenemos un mínimo relativo, y en $x=1$ un máximo.

Hoja 27. Problema 7

7. a) Calcule a y b para que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ pase por el punto $(-1,6)$ y su recta tangente en $x=1$ forme un ángulo de $45º$ con el eje OX.

b) Sea la función $f(x)=x^2-8\cdot\ln(x)$ definida en $f:1\rightarrow+\infty$. Obtener los puntos de inflexión y el valor de la ordenada de esos puntos.

a) $(-1,6)\in f(x) \rightarrow f(-1)=6 \rightarrow -1+a-b+2=6 \rightarrow a-b=5$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$, $f'(1)=1 \rightarrow 3+2a+b=1 \rightarrow 2a+b=-2$

Las dos ecuaciones forman un sistema 2×2 , que resolvemos sumando ambas ecuaciones.

$3a=3 \rightarrow a=1$

Y por lo tanto → $a-b=5 \rightarrow 1-b=5 \rightarrow b=-4$

b) $f(x)=x^2-8\cdot\ln(x) \rightarrow f'(x)=2x-\frac{8}{x} \rightarrow f''(x)=2+\frac{8}{x^2} \rightarrow f''(x)=\frac{2x^2+8}{x^2}$

$f''(x)=0 \rightarrow x=\sqrt{-4}\notin\mathbb{R}$ → no existen candidatos a puntos de inflexión

Hoja 27. Problema 8

8. Sea la función $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$. ¿Qué punto de la gráfica de la función se encuentra a la menor distancia posible del origen $(0,0)$? Obtener esa distancia mínima.

Sea (x,y) un punto perteneciente a la gráfica de la función. La distancia de este punto al origen $(0,0)$ es:

$$d=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

Si $(x,y)\in f(x) \rightarrow y=f(x) \rightarrow y=\sqrt{x^2+x+1}$ → Llevando esta relación a la función distancia → $d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(\sqrt{(x^2+x+1)})^2}=\sqrt{2x^2+x+1}$

Ya tenemos la función distancia a minimizar. Derivamos e igualamos a cero.

$$d'=\frac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x+1}} \;,\; d'=0 \rightarrow 4x+1=0 \rightarrow x=\frac{-1}{4}$$ → punto crítico

Evaluamos la derivada a izquierda y derecha del punto crítico.

Función $d(x)$	$d(x)\downarrow$	$d(x)\uparrow$
Intervalos	$(-\infty,\frac{-1}{4})$	$(\frac{-1}{4},+\infty)$
Derivada $d'(x)$	$d'(1)<0$	$d'(10)>0$

Por lo tanto, $x=\frac{-1}{4}$ es un mínimo relativo. Y la distancia mínima es:

$$d(\frac{-1}{4})=\sqrt{2(\frac{-1}{4})^2+(\frac{-1}{4})+1}=\sqrt{\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{1-2+8}{8}}=\sqrt{\frac{7}{8}} \;\; unidades$$