Problemas – Tema 1

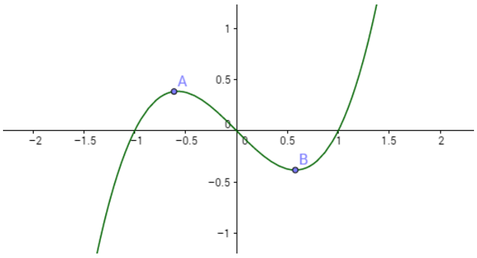
Solución a problemas de Repaso de Matemáticas I - Hoja 26 - Todos resueltos

Hoja 26. Problema 1

1. a) Calcula el número real m que cumple $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+mx)}{sen(2x)}=3$.

b) Obtener el valor de a para que la función $f(x)=\begin{Bmatrix} x^2+ax+a-1 & si & x<2 \\ \ln(x-1) & si & x\geq 2 \end{Bmatrix}$ sea continua en $x=2$.

c) La siguiente gráfica muestra la derivada $f'(x)$ de una función $f(x)$. Viendo la gráfica, ¿qué podemos decir de los intervalos de crecimiento, decrecimiento y de los extremos relativos de la función original $f(x)$?



a) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+mx)}{sen(2x)}=\frac{\ln(1)}{sen(0)}=\frac{0}{0}$ → Indeterminación

Aplicamos L'Hôpital → $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{m}{1+mx}}{2\cdot\cos(2x)}=\frac{\frac{m}{1}}{2}=\frac{m}{2}$ → Igualamos el límite a 3 → $\frac{m}{2}=3$ → $m=6$

b) Las condiciones de continuidad en un punto son las siguientes:

$\exists f(2)=\ln(2-1)=\ln(1)=0$

$\lim_{x\to 2^-}(x^2+ax+a-1)=3+3a$, $\lim_{x\to 2^+}\ln(x-1)=0$ $\rightarrow$ $3+3a=0$ $\rightarrow$ $a=-1$

c) La función original $f(x)$ es estrictamente decreciente (derivada negativa) en $(-\infty,-1)\cup(0,1)$, y estrictamente creciente (derivada positiva) en el intervalo $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

Existe un mínimo relativo de $f(x)$ en $x=-1$ (cambio de derivada negativa a positiva), un máximo relativo en $x=0$ (cambio de derivada positiva a negativa), y un nuevo mínimo relativo en $x=1$.

Hoja 26. Problema 2

2. Sea la función $g(x)=\frac{x^3}{3}-4x^2-\frac{2x}{3}-4$ **. Hallar los valores** x **de la curva en que la recta tangente es paralela a la recta** $0=2x+3y-4$ **.**

La pendiente de las rectas tangentes que buscamos coincide con la pendiente la recta $0=2x+3y-4 \rightarrow y=\frac{-2}{3}x+\frac{4}{3} \rightarrow pendiente=\frac{-2}{3}$. Derivamos la función e igualamos a este valor de la pendiente.

$$g(x)=\frac{x^3}{3}-4x^2-\frac{2x}{3}-4 \rightarrow g'(x)=x^2-8x-\frac{2}{3} \quad , \quad g'(x)=\frac{-2}{3} \rightarrow x^2-8x-\frac{2}{3}=\frac{-2}{3} \rightarrow$$

$$x^2-8x=0 \rightarrow x(x-8)=0 \rightarrow x=0 \quad , \quad x=8$$

Hoja 26. Problema 3

3. Considera la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Determina $a, b\ y\ c$ sabiendo que la recta normal a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$ es $y+x+3=0$ y que el punto de inflexión tiene abscisa $x=1$.

La recta normal es perpendicular a la recta tangente. Por lo que el producto de sus pendientes es igual a -1 .

La recta normal en $x=0$ es $y+x+3=0$ $\rightarrow$ $y=-x-3$ $\rightarrow$ $pendiente_{normal}=-1$ $\rightarrow$ Por lo tanto la pendiente de la recta tangente en $x=0$ es $m_{tangente}=1$. Y sabemos que la pendiente de la recta tangente a la función en un punto coincide con el valor de la derivada de la función en ese punto. Es decir:

$$f'(0)=1$$

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \quad \rightarrow \quad f'(x)=3x^2+2ax+b \quad \rightarrow \quad f'(0)=b \quad , \quad f'(0)=1 \quad \rightarrow \quad b=1$$

En el punto $x=0$ coinciden la función y la recta normal $y+x+3=0$. Por lo que podemos obtener la imagen de la función en $x=0$ gracias a la ecuación de la recta. Es decir:

$y=-x-3$, si $x=0$ $\rightarrow$ $y=-3$ $\rightarrow$ $(0, f(0))=(0,-3)$

Llevamos este punto a la función, recordando que ya hemos obtenido $b=1$.

$$f(x)=x^3+ax^2+x+c \quad \rightarrow \quad f(0)=c \quad , \quad f(0)=-3 \quad \rightarrow \quad c=-3$$

Finalmente, si tenemos un punto de inflexión en $x=1$ la segunda derivada de la función debe anularse en ese punto.

$$f'(x)=3x^2+2ax+1 \quad \rightarrow \quad f''(x)=6x+2a \quad , \quad f''(1)=0 \quad \rightarrow \quad 6+2a=0 \quad \rightarrow \quad a=-3$$

Con estos valores el polinomio solución resulta $f(x)=x^3-3x^2+x+-3$.

Hoja 26. Problema 4

4. Sea la función $f:(0,+\infty)$ **y definida por** $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$ **.**

a) Halla los extremos relativos de $f(x)$ **.**

b) Determina la ecuación explícita de la recta tangente a la función en $x=e$ **.**

a) La condición necesaria de extremo relativo es que la primera derivada se anule.

$f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x) \rightarrow f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-1+x}{x^2}$, $f'(x)=0 \rightarrow x=1 \rightarrow$ punto crítico.

Calculamos la segunda derivada y evaluamos en ella el punto crítico.

$f''(x)=\frac{x^2-(-1+x)2x}{x^4}=\frac{x-(-1+x)2}{x^3}=\frac{-x+2}{x^3}$, $f''(1)=\frac{-1+2}{1}=1>0$ $\rightarrow$ por lo tanto $x=1$ es un mínimo relativo.

b) En $x=e$ la imagen resulta $\rightarrow$ $f(e)=\frac{1}{e}+\ln(e)=\frac{1}{e}+1=\frac{1+e}{e}$. La derivada de la función en $x=e$ coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

$$f'(x)=\frac{-1+x}{x^2} \rightarrow f'(e)=\frac{e-1}{e^2}$$

La ecuación punto-pendiente de la recta tangente resulta:

$$\frac{y-\frac{1+e}{e}}{x-e}=\frac{e-1}{e^2} \rightarrow y=\left(\frac{e-1}{e^2}\right)x-\frac{e-1}{e}+\frac{1+e}{e} \rightarrow y=\left(\frac{e-1}{e^2}\right)x+\frac{1-e}{e}+\frac{1+e}{e} \rightarrow$$

$$\rightarrow y=\left(\frac{e-1}{e^2}\right)x+\frac{2}{e}$$

Hoja 26. Problema 5

5. a) Sea $f(x)=sen(x)$. Obtener la ecuación explícita de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x=\frac{\pi}{4}$.

b) Sabiendo que $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln x}\right)$ es finito, calcula a y el valor del límite.

a) $x=\frac{\pi}{4} \to f\left(\frac{\pi}{4}\right)=sen\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ → punto $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$f(x)=sen(x) \to f'(x)=\cos(x) \to f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ → pendiente $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ecuación punto-pendiente:

$$\frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \to y-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4} \to y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x+\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\pi}{8}$$

b) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x\cdot\ln x-a(x-1)}{(x-1)\ln x}\right)=\frac{0}{0}$ → Indeterminación $\frac{0}{0}$

Aplicamos la regla de L'Hôpital → $\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x\cdot\ln x-a(x-1)}{(x-1)\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x+1-a}{\ln x+\frac{x-1}{x}}\right)=\frac{1-a}{0}$$

Las condiciones del enunciado marcan que el límite sea finito, por lo que al tener un cociente con denominador igual a 0, necesitamos que el numerador también sea nulo para que el límite no se dispare a infinito → $a=1$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x(x+1)}\right)=\frac{1}{2}$$

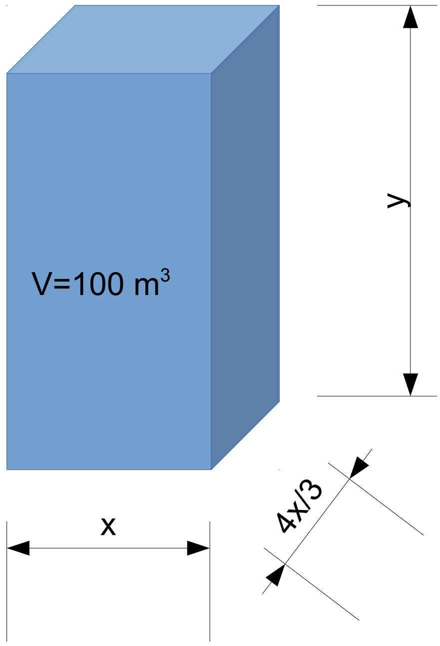
Hoja 26. Problema 6

6. Se desea construir un contenedor con forma de paralelepípedo rectangular de $100\,m^3$ de volumen, de manera que el largo de su base sea $\frac{4}{3}$ de la anchura x de su base. Los precios de m^2 de pintura del suelo, del techo y de la pared lateral son, respectivamente, $225\,€/m^2$, $300\,€/m^2$ y $256\,€/m^2$. Determinar razonadamente las dimensiones que minimizan el coste de pintura y dicho coste mínimo.

Anchura de la base → x

Largo de la base → $\frac{4x}{3}$

Altura del paralelepípedo → y



El coste de pintura de todo el contenedor es la función a minimizar.

$$P=P_{base}+P_{techo}+2\cdot P_{pared\ lateral\ de\ base\ x}+2\cdot P_{pared\ lateral\ de\ base\ \frac{4x}{3}}$$

$$P_{base}=225\cdot x\cdot\frac{4x}{3}$$

$$P_{techo}=300\cdot x\cdot\frac{4x}{3}$$

$$P_{pared\ lateral\ de\ base\ x}=256\cdot x\cdot y$$

$$P_{pared\ lateral\ de\ base\ \frac{4x}{3}}=256\cdot\frac{4x}{3}\cdot y$$

Es decir:

$$P=225\cdot x\cdot\frac{4x}{3}+300\cdot x\cdot\frac{4x}{3}+2\cdot 256\cdot x\cdot y+2\cdot 256\cdot\frac{4x}{3}\cdot y$$

$$P=300x^2+400x^2+512\cdot x\cdot y+\frac{2048}{3}\cdot x\cdot y \quad\rightarrow\quad P=700x^2+512\cdot x\cdot y+\frac{2048}{3}\cdot x\cdot y$$

Debemos expresar la función a minimizar dependiendo de una sola variable. Usando el dato del volumen del contenedor:

$$V=x\cdot\frac{4x}{3}\cdot y \quad\rightarrow\quad 100=\frac{4}{3}\cdot x^2\cdot y \quad\rightarrow\quad y=\frac{300}{4x^2}$$

Sustituimos en la función precio a minimizar.

$$P=700x^2+512\cdot x\cdot\frac{300}{4x^2}+\frac{2048}{3}\cdot x\cdot\frac{300}{4x^2}$$

$$P=700x^2+\frac{38400}{x}+\frac{51200}{x}$$

$$P=700x^2+\frac{89600}{x}$$

Derivamos e igualamos a cero, como condición necesaria de extremo relativo.

$$P'=1400x-\frac{89600}{x^2}=\frac{1400x^3-89600}{x^2}$$

$$P'=0 \quad\rightarrow\quad 1400x^3-89600=0 \quad\rightarrow\quad x^3=64 \quad\rightarrow\quad x=\sqrt[3]{64} \quad\rightarrow\quad x=4 \quad\rightarrow \text{punto crítico}$$

Comprobamos que estamos ante un mínimo relativo.

Función $P(x)$	$P(x)\downarrow$	$P(x)\uparrow$
Intervalos	$(-\infty,4)$	$(4,+\infty)$
Derivada $P'(x)$	$P'(1)<0$	$P'(10)>0$

Por lo tanto, $x=4$ es un mínimo relativo de la función precio.
Las dimensiones del contenedor son las siguientes:

Anchura de la base → $x=4\,m$

Largo de la base → $\frac{4x}{3}=\frac{16}{3}m$

Altura del paralelepípedo → $y=\frac{300}{4x^2}=\frac{300}{4\cdot 16}=\frac{150}{32}=\frac{75}{16}m$

Precio mínimo → $P(4)=700\cdot(4)^2+\frac{89600}{4}=33600\,€$

Hoja 26. Problema 7

7. Sea $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ un polinomio con extremo relativo en $x=1$, con punto de inflexión en $x=3$ y que pasa por el origen de coordenadas. Determinar a, b y c.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$, $f'(1)=0 \rightarrow 3+2a+b=0$

$f''(x)=6x+2a$, $f''(3)=18+2a \rightarrow 18+2a=0 \rightarrow a=-9$

$(0,0)\in f(x) \rightarrow f(0)=0 \rightarrow c=0$

De la primera ecuación, si $a=-9$, resulta → $3-18+b=0 \rightarrow b=15$

Hoja 26. Problema 8

8. Sea la función definida por $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$ **. Estudia el dominio, los puntos de corte con los ejes, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos.**

Dominio → $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-1,2\}$

Corte eje OX → $y=0$ → $2x^2=0$ → $(0,0)$

Corte eje OY → $x=0$ → $y=0$ → $(0,0)$

Asíntotas verticales en $x=-1$ y $x=2$, ya que se cumple:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\infty \rightarrow \lim_{x\to -1^-}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{2}{0^+}=+\infty \ , \ \lim_{x\to -1^+}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\infty \rightarrow \lim_{x\to 2^-}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{8}{0^-}=-\infty \ , \ \lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{8}{0^+}=+\infty$$

Asíntota horizontal → $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=2$ → por se cociente de polinomios del mismo grado, el límite converge al cociente de coeficientes que acompañan a la máxima potencia x^2 .

Existe asíntota horizontal en $y=2$, por lo que no existe oblicua.

$$f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{2x^2}{x^2-x-2} \rightarrow f'(x)=\frac{4x(x^2-x-2)-2x^2(2x-1)}{(x^2-x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4x^3-4x^2-8x-4x^3+2x^2}{(x^2-x-2)^2}=\frac{-2x^2-8x}{(x^2-x-2)^2} \ , \ f'(x)=0 \rightarrow -2x^2-8x=0$$

$-x(2x+8)=0$ → $x=0$, $x=-4$ → puntos críticos

Estudiamos el crecimiento y la existencia de extremos relativos.

Función $f(x)$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\downarrow$
Intervalos	$(-\infty,-4)$	$(-4,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(4,+\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(-10)<0$	$f'(-2)>0$	$f'(\frac{-1}{2})>0$	$f'(1)<0$	$f'(10)<0$

La función es estrictamente decreciente en $(-\infty,-4)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$, estrictamente creciente en $(-4,-1)\cup(-1,0)$, presenta un mínimo relativo en $x=-4$ (punto $(-8,1.78)$) y un máximo relativo en $x=0$ (punto $(0,0)$).

Aunque no nos pidan la gráfica, la incluimos para comprender geométricamente la solución.

Gráfica de $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$