Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso de Matemáticas I - Hoja 20 - Problemas 1, 2, 3, 4, 5

Hoja 20. Problema 1

Resuelto por Elena Galán Ruiz (octubre 2014)

1. Sea la función continua $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x+k & si & x\leqslant 0 \\ \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} & si & x>0 \end{Bmatrix}$$

a) Calcula el valor de k .

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$.

a) Para que la función sea continua en $x=0$, en primer lugar debe estar definida en este valor.

$$f(0)=k$$

Además los límites laterales en $x=0$, por la izquierda y por la derecha, deben coincidir.

$$\lim_{x\to 0-}(x+k)=k$$

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)=\frac{0}{0}$$ → indeterminación → L'Hôpital → $$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{2x\,e^{x^2}}{2x}\right)=1$$

Igualando los límites laterales → $k=1$

b) Sabemos que la pendiente de la recta tangente a la función en un punto, coincide con el valor de la derivada de la función en ese punto.

$$f(x)=\frac{(e^{x^2}-1)}{x^2} \rightarrow f'(x)=\frac{(e^{x^2}2x)\cdot(x^2)-(e^{x^2}-1)\cdot 2x}{x^4}$$

$$f'(x=1)=2$$

El valor de la función $x=1$ es → $f(1)=e-1$ → La recta pasa por $(1,e-1)$.
Aplicamos la ecuación punto pendiente de la recta.

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$y-(e-1)=2\cdot(x-1) \rightarrow y=2x+e-3$$

Hoja 20. Problema 2

Resuelto por Elena Galán Ruiz (octubre 2014)

2. Sea la función $f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x},\ x\neq 1$ **.**

a) Estudia las asíntotas de la gráfica de la función.

b) Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$ **.**

a) Asíntota vertical en $x=1$.

$$\lim_{x\to 1-}\left(\frac{e^{-x}}{1-x}\right)=\frac{1}{0^{+}}=-\infty\quad,\quad \lim_{x\to 1+}\left(\frac{e^{-x}}{1-x}\right)=\frac{1}{0^{-}}=+\infty$$

Asíntotas horizontales.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{-x}}{1-x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^{x}(1-x)}\right)=0\ \rightarrow\ y=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{-x}}{1-x}\right)=\frac{+\infty}{+\infty}\ \rightarrow \text{indeterminación} \rightarrow \text{L'Hôpital} \rightarrow\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-e^{-x}}{-1}\right)=+\infty$$

No existen asíntotas oblicuas.

b) Obtenemos la primera derivada e igualamos a cero para obtener los puntos críticos.

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}$$

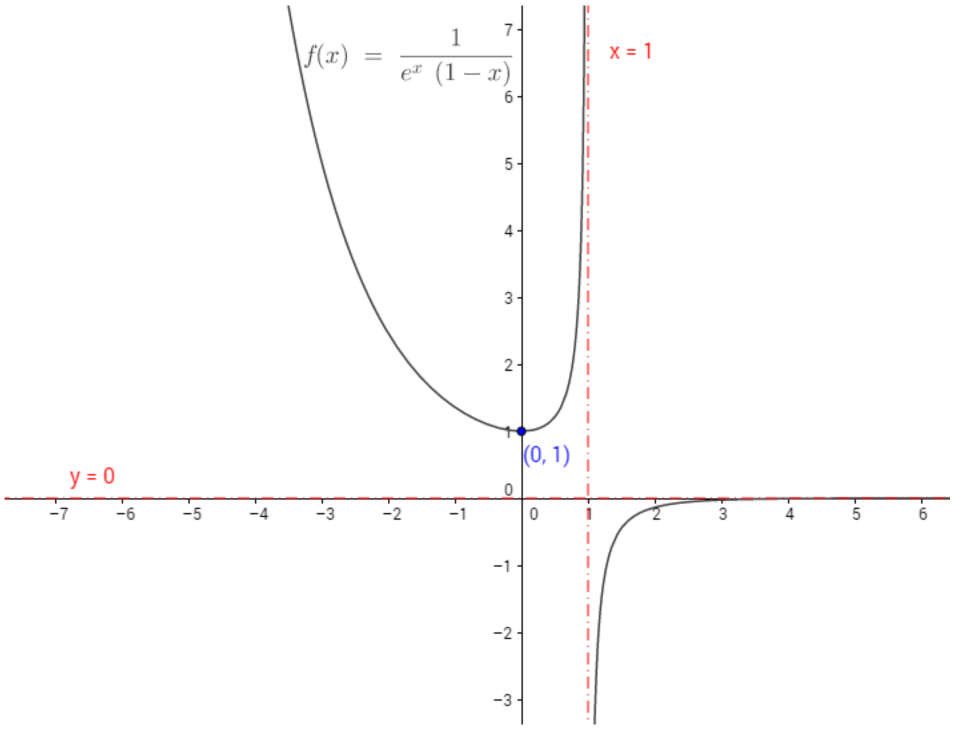
$$f'(x)=\frac{-e^{-x}(1-x)-e^{-x}(-1)}{(1-x)^{2}}=\frac{x\,e^{-x}}{(1-x)^{2}}\ \rightarrow\ f'(x)=0\ \rightarrow xe^{-x}=0\ \rightarrow x=0$$

Para conocer los intervalos de crecimiento y decrecimiento, evaluamos la primera derivada en los tramos generados por el punto crítico $x=0$, y por el punto donde no está definida la función $x=1$.

Función $f(x)$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\uparrow$
Intervalos	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f''(-10)<0$	$f''(\frac{1}{2})>0$	$f'(10)>0$

Existe un mínimo relativo en $(0,1)$

$$\textit{Gráfica de } f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}, \textit{ asíntotas } x=1, \; y=0$$



Hoja 20. Problema 3

Resuelto por Curro García Olmedo (octubre 2014)

3. Queremos hacer junto a la carretera un cercado rectangular para unos caballos en una zona llana. Cada metro del lado del cercado que está junto a la carretera nos cuesta 100 euros, mientras que para el resto del cercado nos cuesta 10 euros el metro. ¿Cuáles son las dimensiones del prado de área máxima que podemos cercar con 3000 euros?

El lado del cercado rectangular que colinda con la carretera es x , mientras que el lado que no está junto a la carretera mide y .

La función que debemos optimizar es el área → $A=x\cdot y$

La relación entre las variables la sacamos del coste económico, sabiendo que un metro del lado de dimensión x cuesta $100€/m$, y los metros de otros lados (dos de dimensión y , uno de dimensión x) cuestan $10€/m$.

$$3000\,x=100\,x+10\,y+10\,y+10\,x \quad\rightarrow\quad 2\,y+11\,x=300$$

$$y=-\left(\frac{11}{2}\right)x+150=-5{,}5\,x+150$$

Llevamos el valor de y a la función área → $A=-5{,}5\,x^2+150\,x$

Derivamos e igualamos a cero → $A'=-11\,x+150$, $A'=0 \rightarrow x=\frac{150}{11}$ → punto crítico

Calculamos la segunda derivada y evaluamos en el punto crítico para confirmar la existencia de extremo relativo.

$A''(x)=-11<0 \rightarrow x=\frac{150}{11}$ es un máximo → $y=-5{,}5\left(\frac{150}{11}\right)+150=75\,m$

Y el valor máximo del área es → $A=\frac{11250}{11}=1022{,}72\,m^2$

Hoja 20. Problema 4

Resuelto por Mónica Jiménez (octubre 2014)

4. Sea la función definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx$. Determina a, b y c sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión en $(1,0)$ y que la recta tangente en ese punto tiene por ecuación $y=-3x+3$.

Existe un punto de inflexión en $(1,0)$ $\rightarrow$ $f''(1)=0$

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \rightarrow f''(x)=6ax+2b \rightarrow 6a+2b=0$$

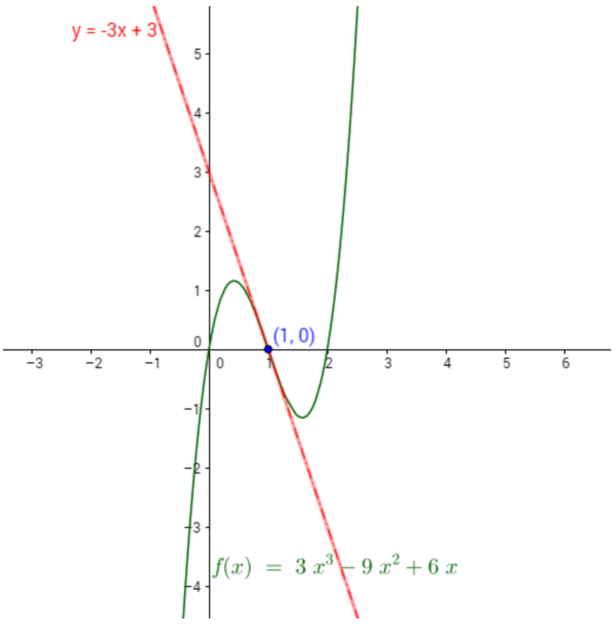
La recta tangente en $(1,0)$ es la recta $y=-3x+3$ → pendiente $m=-3$.

$$f'(1)=3a+2b+c \quad , \quad f'(1)=-3 \rightarrow 3a+2b+c=-3$$

Como el punto $(1,0)$ pertenece a la gráfica de la función → $f(1)=0$ $\rightarrow$ $a+b+c=0$

Podemos generar un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas.

$$\left\{\begin{matrix} 6a+2b=0 \\ 3a+2b+c=-3 \\ a+b+c=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{solución} \rightarrow a=3, \ b=-9, \ c=6$$



Hoja 20. Problema 5

Resuelto por Sara Aparicio (octubre 2014)

5. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-3)^2}$ **, se pide:**

a) Hallar las asíntotas de su gráfica.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ **en el punto de abscisa** $x=2$ **.**

a) Para $x=3$ se anula el denominador, por lo que planteamos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3}{(x-3)^2}=\frac{3^3}{(3-3)^2}=\frac{27}{0}=\infty$$

Estudiamos los límites laterales.

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^3}{(x-3)^2}=\frac{27}{0^+}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to 3^+}\frac{x^3}{(x-3)^2}=\frac{27}{0^+}=+\infty$$

Tenemos asíntota vertical en $x=3$. Para las asíntotas horizontales evaluamos el límite en el infinito.

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{(x-3)^2}=\pm\infty$ → no existen asíntotas horizontales

Para las asíntotas oblicuas evaluamos los siguientes límites.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1 \quad\to\quad m=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{(x-3)^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-(x^3-6x^2+9x)}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x^2+9x}{x^2-6x+9}=6$$

$n=6$ → asíntota oblicua → $y=x+6$.

b) $x=2 \rightarrow f(2)=\dfrac{2^3}{(2-3)^2}=8 \rightarrow$ punto $(2,8)$

Recordamos que la pendiente de la recta tangente a la función en un punto, coincide con el valor de la derivada de la función en ese punto.

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-3)^2-x^3\cdot 2(x-3)\cdot 1}{((x-3)^2)^2}=\frac{3x^2(x-3)-x^3\cdot 2\cdot 1}{(x-3)^3} \rightarrow f'(x)=\frac{x^3-9x^2}{(x-3)^3}$$

Evaluamos para $x=2 \rightarrow f'(2)=\dfrac{2^3-9\cdot 2^2}{(2-3)^3}=28 \rightarrow pendiente=28$

Podemos plantear la ecuación punto-pendiente de la recta.

$$\frac{y-8}{x-2}=28 \rightarrow y=28x-48$$