Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso de 1ºBachillerato - Hoja 02 - Todos resueltos

Hoja 2. Problema 1

1. Sea $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ **un polinomio que cumple** $f(1)=0$ **,** $f'(0)=2$ **, y tiene dos extremos relativos para** $x=1$ **y** $x=2$ **.**

a) Determinar a,b,c y d **.**

b) ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

a) Aplicamos las condiciones del enunciado.

$$f(1)=0 \rightarrow a+b+c+d=0$$
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \quad , \quad f'(0)=2 \rightarrow c=2$$

La condición necesaria para extremos relativo es $f'(x)=0$. El enunciado afirma que existen extremos relativos para $x=1$ y $x=2$. Por lo tanto:

$$f'(1)=0 \rightarrow 3a+2b+c=0$$
$$f'(2)=0 \rightarrow 12a+4b+c=0$$

Por lo que llegamos a un sistema de 4 ecuaciones y 4 incógnitas.

$$\begin{Bmatrix} a+b+c+d=0 \\ c=2 \\ 3a+2b+c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{Bmatrix}$$

De la segunda ecuación tenemos el valor $c=2$. Sustituyendo este valoren las ecuaciones 3ª y 4ª, obtenemos:

$$\begin{Bmatrix} 3a+2b=-2 \\ 12a+4b=-2 \end{Bmatrix}$$

Si la primera fila la multiplicamos por cuatro y le restamos la segunda:

$$4b=-6 \rightarrow b=\frac{-3}{2} \rightarrow a=\frac{1}{3}$$

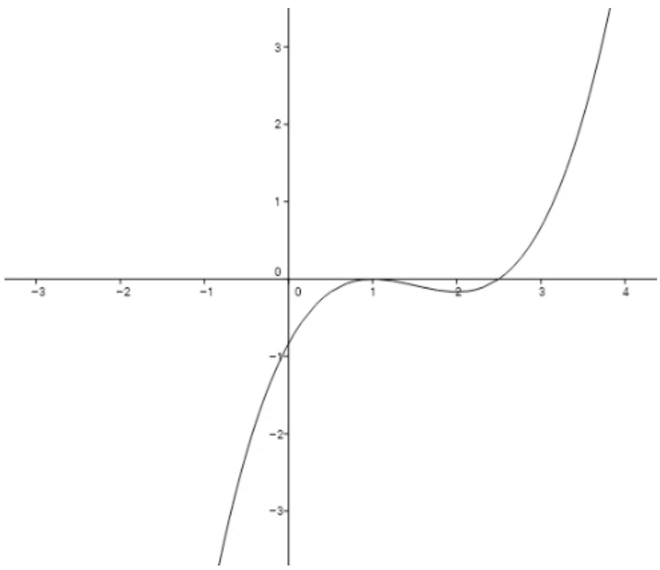
Y sustituyendo los valores de a, b y c en la primera ecuación del sistema 4×4, obtenemos → $d=\frac{-5}{6}$

La función solución resulta → $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{5}{6}$

b) Derivamos dos veces la función f(x) obtenida y evaluamos en los extremos.

$$f''(x)=2x-3$$
$$f''(1)=-1<0 \rightarrow \text{ máximo en } (1,0)$$
$$f''(2)=1>0 \rightarrow \text{ mínimo en } \left(2,\frac{-1}{6}\right)$$

En la gráfica y podemos apreciar claramente los extremos relativos (que no absolutos).



Hoja 2. Problema 2

2. Sea la función $f(x)=2x+sen(2x)$.

a) Determinar si tiene asíntotas de algín tipo.

b) Estudiar su monotonía y la existencia de extremos relativos.

a) Asíntotas verticales no existen, al ser la función continua en $\mathbb{R}$. Para determinar las asíntotas horizontales calculamos el límite en el infinito de la función.

$\lim_{x\to\pm\infty}(2x+sen2x)=\pm\infty$ → No existen asíntotas horizontales

En el estudio de las asíntotas oblicuas $y=mx+n$ nos preguntamos por la convergencia del siguiente límite:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+sen2x}{x}\right)=m$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+sen2x}{x}\right)=2$$

Al ser convergente el límite, nos preguntamos por el término independiente de la asíntota oblicua.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=n$$

$\lim_{x\to\pm\infty}(2x+sen2x-2x)=\lim_{x\to\pm\infty}(sen2x)\to\nexists\lim$ → no existen asíntotas oblícuas.

b) Derivamos e igualamos a cero para obtener los candidatos a extremos relativos.

$f'(x)=2+2\cos(2x)$, $f'(x)=0 \to \cos(2x)=-1$

$2x=\pi + k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ → Candidatos a extremos relativos.

Evaluamos la derivada en un punto a la izquierda de π/2 y en un punto a la derecha de π/2, dentro del intervalo abierto (0, π) al ser periódica con factor de periodicidad π. Recordar que estamos trabajando con radianes como medida de ángulos.

$$f'(1)=2+2\cos(2)=1{,}17>0$$
$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2-1=1>0$$

Es decir, a ambos lados del candidato a extremo relativo la función siempre es creciente por lo que no tenemos extremos relativos.

¿Estaremos ante puntos de inflexión? Calculemos la segunda derivada e igualemos a cero (condición necesaria para punto de inflexión).

$$f''(x)=-4\,sen(2x) \quad , \quad f''(x)=0 \quad \rightarrow \quad sen(2x)=0$$
$$2x=\pi+k\pi\,,\ \ k\in\mathbb{Z}$$
$$x=\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2}\,,\ \ k\in\mathbb{Z}$$ → Candidatos a puntos de inflexión.

Podemos evaluar la segunda derivada a la izquierda y a la derecha de los puntos candidatos a puntos de inflexión. Si al evaluar la segunda derivada es positiva, tendremos una función cóncava hacia arriba U. Y si la segunda derivada es negativa, es cóncava hacia abajo ∩.

Si hay cambio de curvatura alrededor de un punto que anuló la segunda derivada, podremos decir que estamos ante un punto de inflexión.

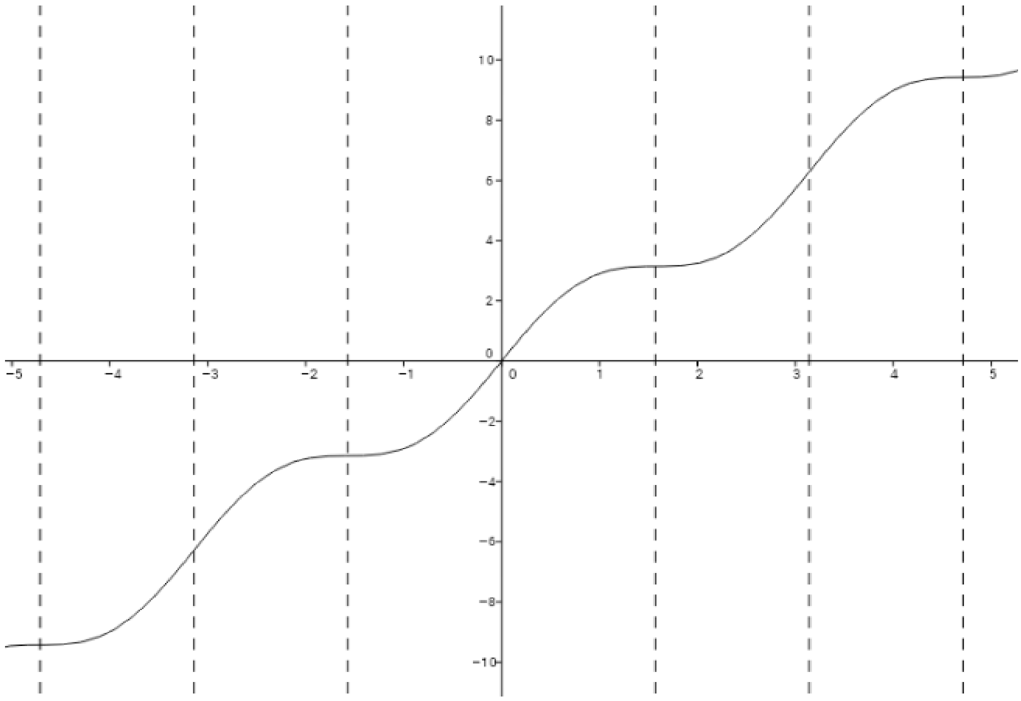
$$f''(-1)=-4\,sen(-2)=3{,}63>0\rightarrow cóncava\ \cup$$
$$f''(0)=-4\,sen 0=0$$
$$f''(1)=-4\,sen(2)=-3{,}63<0\rightarrow convexa\ \cap$$
$$f''(\pi/2)=-4\,sen\,\pi=0$$
$$f''\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-4\,sen\left(\frac{4\pi}{3}\right)=3{,}46>0\rightarrow cóncava\ \cup$$

Existen puntos de inflexión en los puntos: (0, 0), (π/2, π), (π, 2π), (3π/2, 3π), (2π, 4π), ...

Otra opción análoga es calcular la tercera derivada y evaluarla en los puntos que anularon la segunda derivada. Si el resultado es distinto de cero, confirmaremos la existencia del punto de inflexión (podemos aplicar este criterio para derivadas superiores de orden impar: cinco, siete, etc.).

$$f'''(x)=-8\cos(2x) \quad , \quad f'''(\frac{\pi}{2})=8\neq 0$$

Existen puntos de inflexión en los puntos: (0, 0), (π/2, π), (π, 2π), (3π/2, 3π), (2π, 4π), …
La representación gráfica muestra los puntos de inflexión de la función.



Hoja 2. Problema 3

3. Se considera la función $f(x)=\frac{1}{4-x^2}$

a) Indicar el dominio de definición de la función $f(x)$ **y hallar sus asíntotas.**

b) Hallar los extremos relativos de la función $f(x)$ **y sus intervalos de concavidad y convexidad.**

c) Dibujar la gráfica de $f(x)$ **y hallar su máximo y su mínimo absolutos en el intervalo** $[-1,1]$ **.**

a) El dominio corresponderá con todos los valores reales salvo los que anulen el denominador. Por lo tanto:

$$D_f=\mathbb{R}-\{-2,2\}$$

En estos puntos donde no está definida la función encontraremos las asíntotas verticales, como podemos comprobar al calcular los límites laterales.

$$\lim_{x\to 2-}\left(\frac{1}{4-x^2}\right)=\frac{1}{0^+}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to 2+}\left(\frac{1}{4-x^2}\right)=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -2-}\left(\frac{1}{4-x^2}\right)=\frac{1}{0^-}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to -2+}\left(\frac{1}{4-x^2}\right)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Es decir, en $x=-2$ y $x=2$ tenemos dos asíntotas verticales.

El estudio de las asíntotas horizontales implica estudiar el comportamiento de la función cuando la variable x tiende a infinito.

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{4-x^2}\right)=0 \quad , \quad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{4-x^2}\right)=0$$

Es decir, en $y=0$ tenemos una asíntota horizontal, que a su vez confirma la no existencia de asíntotas oblícuas.

b) Los extremos de la función se obtienen derivando e igualando a cero → $f'(x)=0$.

$$f'(x)=\frac{2x}{(4-x^2)^2}$$
$$2x=0 \rightarrow x=0$$

En el punto $(0,\frac{1}{4})$ tenemos un candidato a extremo relativo.

Si calculamos la segunda derivada y evaluamos para $x=0$, tendremos:

$$f''(x)=\frac{6x^2+8}{(4-x^2)^3} \quad , \quad f''(0)=8>0 \quad \rightarrow \quad (0,\frac{1}{4})$$ es un mínimo relativo

Los puntos de inflexión los estudiamos anulando la segunda derivada → $f''(x)=0$.

$$f''(x)=\frac{6x^2+8}{(4-x^2)^3}$$
$$6x^2+8=0 \rightarrow x^2=\frac{-4}{3} \quad \nexists \ \textit{solución real}$$

Al no anularse la segunda derivada no tendremos puntos de inflexión.

Evaluando la primera derivada a ambos lados del mínimo relativo y de las asíntotas verticales, podremos estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función.

$$f'(-5)<0 \rightarrow \textit{decreciente}$$
$$x=-2 \ \textit{asíntota vertical}$$
$$f'(-1)<0 \rightarrow \textit{decreciente}$$
$$x=0 \ \textit{mínimo relativo}$$
$$f'(1)>0 \rightarrow \textit{creciente}$$
$$x=2 \ \textit{asíntota vertical}$$
$$f'(5)>0 \rightarrow \textit{creciente}$$

La función es decreciente en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ y creciente en $(0,2)\cup(2,+\infty)$.

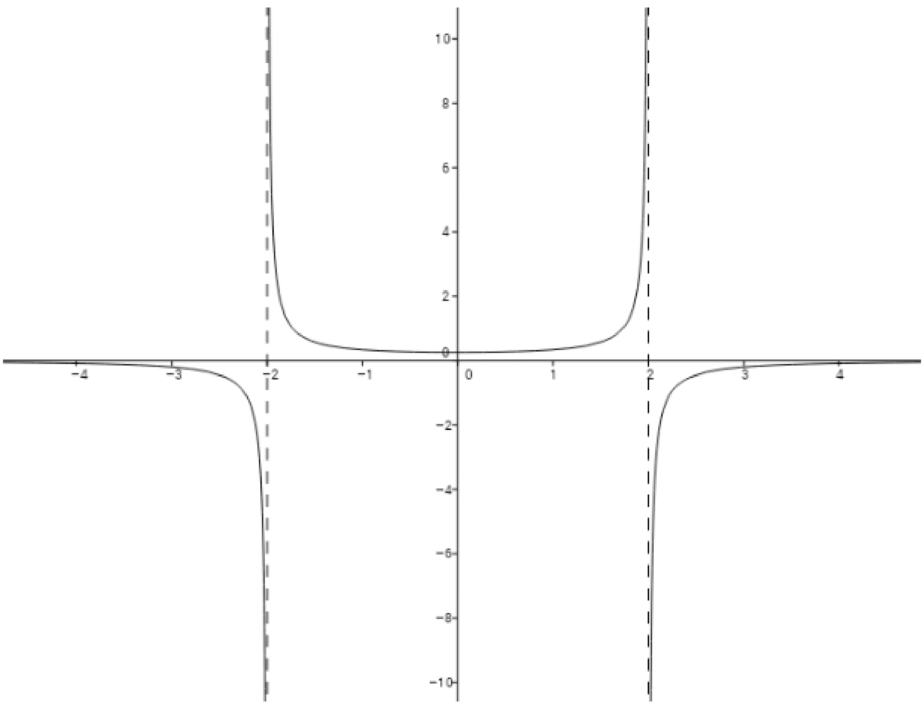
La curvatura la obtenemos evaluando la segunda derivada a ambos lados de las asíntotas verticales (recordamos que no hay puntos de inflexión).

$$\begin{array}{c} f''(-5)<0 \rightarrow \cap \\ x=-2 \quad \textit{asíntota vertical} \\ f''(-1)>0 \rightarrow \cup \\ x=2 \quad \textit{asíntota vertical} \\ f''(5)<0 \rightarrow \cap \end{array}$$

La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ y cóncava hacia arriba en $(-2,2)$.

c) En el intervalo $[-1,1]$ el punto $(0,\frac{1}{4})$ es un mínimo absoluto de la función. En ese mismo intervalo los máximos absolutos se alcanzan para $(-1,\frac{1}{3})$ y $(1,\frac{1}{3})$.

$$\textit{Función} \quad f(x)=\frac{1}{4-x^2}$$

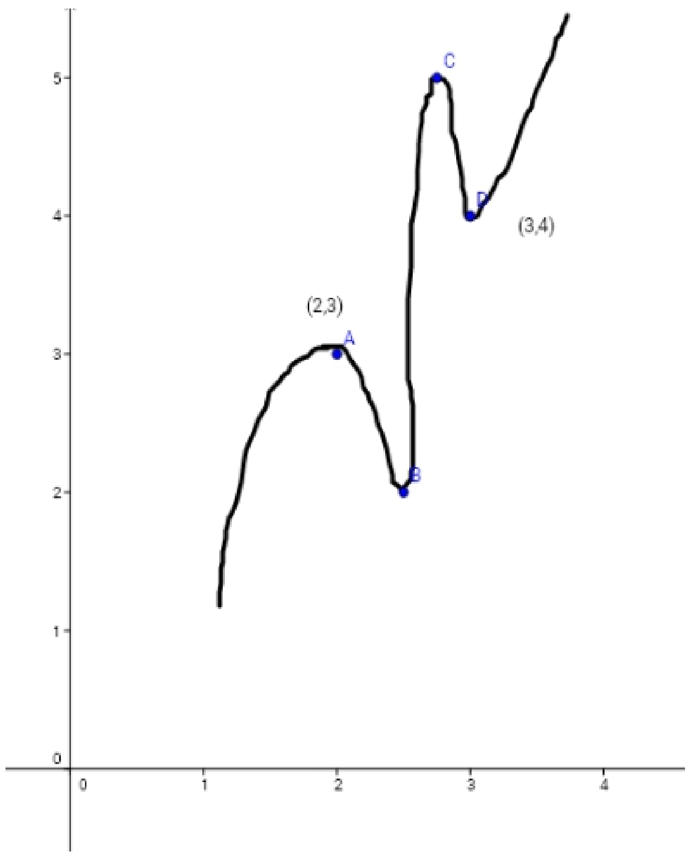


Hoja 2. Problema 4

4. a) Si es posible, dibujar de forma clara la gráfica de una función continua en el intervalo $[0,4]$ que tenga al menos un máximo relativo en el punto $(2,3)$ y un mínimo relativo en el punto $(3,4)$.

b) Si la función fuera polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado?

a) Ejemplo de gráfica a mano alzada pintada con GeoGebra y que cumple las condiciones del enunciado.



b) La función tiene, al menos, cuatro extremos, por lo que el grado del polinomio tiene que ser cinco como mínimo. De esta forma, al derivar el polinomio de grado cinco (n), tendremos al menos los cuatro extremos (n - 1) como solución de igualar la derivada a cero (pendiente cero).