Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso de Matemáticas I - Hoja 19 - Problemas 1, 2, 3

Hoja 19. Problema 1

Resuelto por Curro García Olmedo (septiembre 2014)

1. El cajero automático de una determinada entidad bancaria solo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del numero de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

x → número de billetes de 50 euros

y → número de billetes de 20 euros

z → número de billetes de 10 euros

Tenemos un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas.

$$\begin{cases} 50x+20y+10z=7000 \\ x+y+z=225 \\ x+z=2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=225 \\ 50x+20y+10z=7000 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$

De la tercera ecuación → $z=2y-x$ → $\begin{cases} 3y=225 \\ 40x+40y=7000 \end{cases}$ → $y=\frac{225}{3}=75$

Sustituyendo el valor de y, obtenemos la soluciones $x=100$, $y=75$, $z=50$.

Hoja 19. Problema 2

Resuelto por Alberto Jiménez Molina (octubre 2014)

2. Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **definida por** $f(x)=e^x(x^2-x+1)$ **.**

a) Calcula $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ **,** $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **.**

b) Halla los extremos relativos de $f(x)$ **(abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan), determinando si son máximos o mínimos.**

c) Determina las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$ **.**

a) $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x(x^2-x+1)=+\infty\cdot(+\infty)=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x(x^2-x+1)=0\cdot(+\infty)$ → indeterminación → reordenamos términos

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+1}{\frac{1}{e^x}}=\frac{\infty}{\infty}$ → L'Hôpital → $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{\frac{-1}{e^x}}=\frac{\infty}{\infty}$ L'Hôpital → $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\frac{1}{e^x}}=\frac{2}{\infty}=0$

b) Derivamos e igualamos a cero para hallar los puntos críticos.

$$f'(x)=\mathrm{e}^x(x^2-x+1)+\mathrm{e}^x(2x-1) \quad\rightarrow\quad f'(x)=\mathrm{e}^x(x^2+x) \quad , \quad f'(x)=0$$

La exponencial nunca se hace cero, por lo que nos queda:

$x^2+x=0 \quad\rightarrow\quad x=0 \quad , \quad x=1$ → puntos críticos

Calculamos la segunda derivada para averiguar si son máximos o mínimos.

$$f'(x)=\mathrm{e}^x(x^2+x) \quad\rightarrow\quad f''(x)=\mathrm{e}^x(x^2+x)+e^x(2x+1) \quad\rightarrow\quad f''(x)=\mathrm{e}^x(x^2+3\mathrm{x}+1)$$

$f''(0)=1>0 \quad\rightarrow$ mínimo en $(0,1)$

$f''(-1)=\frac{-1}{e}<0$ → máximo en $(-1,\frac{3}{e})$

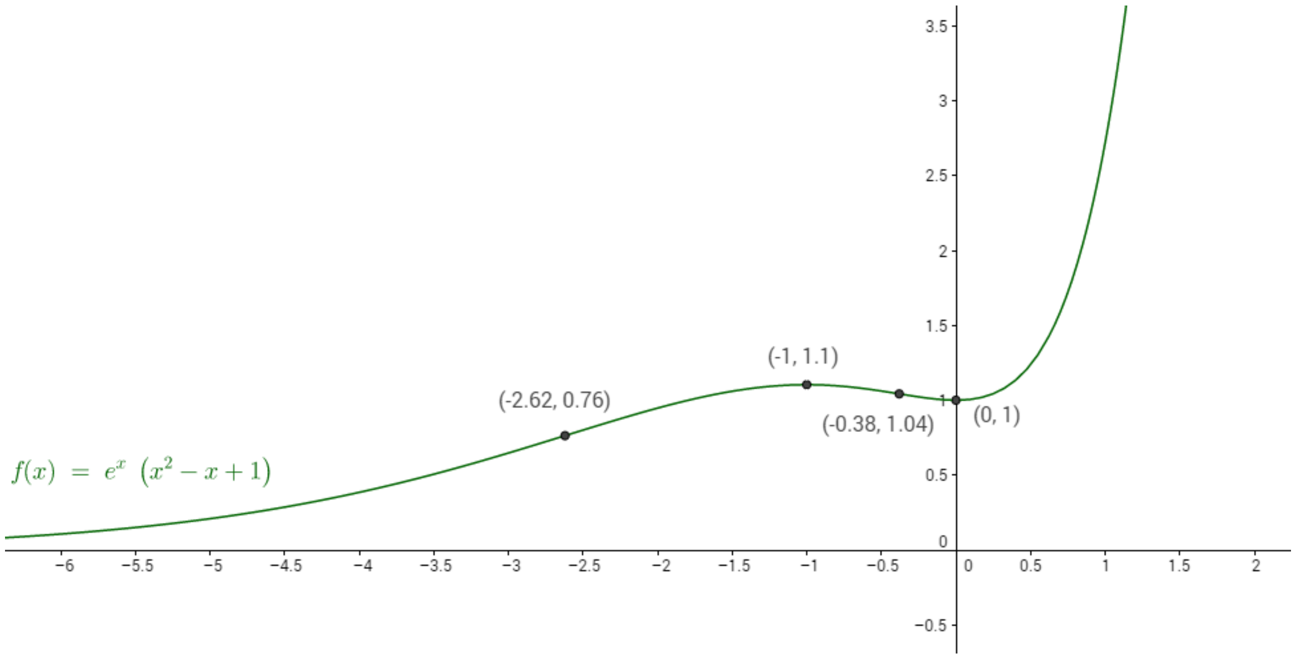
c) Los candidatos a puntos de inflexión se obtienen de igualar la segunda derivada a cero.

$$f''(x)=e^x(x^2+3x+1) \quad , \quad f''(x)=0 \quad \rightarrow \quad x^2+3x+1=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

Para confirmar que estamos ante puntos de inflexión, podemos evaluar la tercera derivada en los puntos candidatos. Y si la tercera derivada resulta distinta de cero, confirmaremos su existencia. O bien (puede ser más sencillo), determinar la curvatura a ambos lados de estos puntos.

Función $f(x)$	$f(x)\cup$	$f(x)\cap$	$f(x)\cup$
Intervalos	$(-\infty,\frac{-3-\sqrt{5}}{2})$	$(\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2})$	$(\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\infty)$
Segunda Derivada $f''(x)$	$f''(-10)>0$	$f''(-1)<0$	$f'(0)>0$

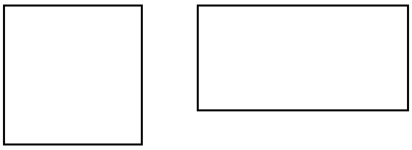
$$\textit{Gráfica de } f(x)=e^x(x^2-x+1)$$



Hoja 19. Problema 3

Resuelto por Alberto Jiménez Molina (octubre 2014)

3. Un alambre de $100\,m$ de longitud se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se construye un cuadrado y con el otro un rectángulo cuya base es doble que su altura. Calcula las longitudes de cada uno de los trozos con la condición de que la suma de las áreas de estas dos figuras sea mínima.



y → lado del cuadrado
x → altura del rectángulo
$2x$ → base del rectángulo

Según la información obtenida por el problema podemos decir que el perímetro de las dos figuras cumple:

$100=4y+6x$ → despejamos x → $x=\frac{50-2y}{3}$

La función área que debemos minimizar será la suma del área del cuadrado y el área del rectángulo.

$$A=y^2+x\cdot 2x=y^2+2x^2$$

Llevamos al área el valor de x en función de y .

$A=f(y)=y^2+2\left(\frac{50-2y}{3}\right)^2$ → la función área solo depende de la variable y

Derivamos → $f'(y)=2y+4\left(\frac{50-2y}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)$

Igualamos a cero → $f'(y)=0$ → $0=2y-\frac{8}{9}(50-2y)$ → $0=2y-\frac{400}{9}+\frac{16y}{9}$

$$\frac{400}{9}=\frac{34y}{9} \quad \rightarrow \quad y=\frac{400}{34}=11{,}765 \quad metros$$

Longitud tramo del cuadrado → $4y=47{,}059\,m$

Comprobamos que el valor de y obtenido minimiza la función área:

$f''(\frac{400}{34})=\frac{34}{9}>0$ > 0 → tenemos un mínimo en $y=\frac{400}{34}=11{,}765 \quad metros$

El valor de x será:

$$x=\frac{50-2y}{3}=8{,}829 \quad metros$$

Longitud del tramo del rectángulo → $6x=52{,}941\,m$

Con estos valores el área máxima resulta → $A_{máx}=294{,}118\,m^2$